PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. 1. März 1918. Redaktionsschluß für No. 7 am 6. März 1918. 19. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:
R. v. Mises, Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes. S. 81.
R. Durrer, Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen. S. 86.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
O. Lehmann, Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen. (II. Teil.) S. 88.
Besprechungen:
L. Zehnder, Grundriß der Physik. S. 100.
C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. S. 101.
L. Graetz, Die Physik. S. 102.
K. Strecker, Jahrbuch der Elektrotechnik. II. III. IV. S. 103.
J. L. Weyrauch, Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt. S. 104.
C. Neumann, Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. S. 104.
J. Hartmann, Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. S. 104.
Personalien. S. 104.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Einfache und exakte Ableitung des Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungs-Satzes.

Von R. v. Mises.

Für den Satz, daß unter allen möglichen Geschwindigkeits-Verteilungen in einem Gase die sog. Maxwellsche Verteilung:

$$m_i = A\, e^{-h^2(v_i - c)^2} \qquad (1)$$

(A, h, c Konstante, m_i Zahl der Moleküle mit der Geschwindigkeit v_i) die wahrscheinlichste sei, wird in der Regel eine Ableitung gegeben, die weder als einfach noch als einwandfrei bezeichnet werden kann. Die Ableitung geht von der Stirlingschen Formel aus, die sich wieder auf die Eigenschaften der Eulerschen Γ-Funktion stützt, sie verwischt die natürliche Forderung nach der Ganzzahligkeit der Lösung und läßt es im unklaren, in welchem Maße die Lösung eine nur für eine große Zahl der Moleküle gültige Annäherung bildet. In den folgenden Zeilen wird im Anschluß an eine kurze Darstellung der bisherigen Ableitung ein neuer, ganz elementarer Beweis gegeben, der von den angedeuteten Mängeln frei ist und zu einer exakt formulierten, über das bisher Bekannte hinausgehenden Aussage führt; an einem Zahlenbeispiel wird der Sinn des neu formulierten Hauptsatzes erörtert.

1. Problemstellung.

Wenn n-Elemente derart in k-Gruppen zerfallen, daß die erste Gruppe n_1, die zweite $n_2 \ldots$, die k-te n_k-Elemente umfaßt, so sind bekanntlich

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots . n_k!} \qquad (2)$$

verschiedene individuelle Anordnungen der Elemente möglich, die diese Einteilung ergeben. Die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung — Gleichheit für jede individuelle Anordnung vorausgesetzt — ist also dem Ausdruck

$$N = n_1!\, n_2! \ldots . n_k! \qquad (3)$$

umgekehrt proportional. Es sei nun jeder Gruppe von Elementen eine bestimmte Zahl $v_1, v_2 \ldots . v_k$ — in der Gastheorie ist dies die Geschwindigkeit der betreffenden Moleküle — zugeordnet und neben der Gesamtzahl n der Elemente auch der Mittelwert v_0 und der quadratische Mittelwert v_{00}^2 von vornherein gegeben, d. h.

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \ldots . n_k &= n\,, \\ n_1 v_1 + n_2 v_2 + \ldots n_k v_k &= n v_0\,, \\ n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + \ldots n_k v_k^2 &= n v_{00}^2\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Alle gegebenen Größen müssen wir naturgemäß als rationale oder, was bei entsprechender Wahl der Einheit auf dasselbe hinauskommt, als ganze Zahlen voraussetzen. Ist $k > 3$, was wir hinfort immer annehmen, so haben die „diophantischen Gleichungen" (4) unendlich viele ganzzahlige Lösungen, unter denen im allgemeinen eine beschränkte Anzahl von positiven sich befindet. Von diesen muß eine, oder eventuell mehrere, den Ausdruck (3) zu einem Minimum machen und somit die „größte Wahrscheinlichkeit" besitzen. Die Bedingungen, denen v_0 und v_{00} genügen müssen, damit es überhaupt positive Lösungen von (4) gibt, setzen wir als erfüllt voraus. Ebenso nehmen wir an, daß es möglich sei, die drei Konstanten A, h, c in (1) so zu wählen, daß m_i, für n_i in (4) eingesetzt, diese drei Gleichungen erfüllt. Es besteht dann folgende Aufgabe:

Man soll nachweisen, daß die Maxwellsche Lösung (1) oder wenigstens eine ihr „benachbarte" ganzzahlige Lösung von (4) und keine andere den Ausdruck (3) zu einem Minimum unter den Nebenbedingungen (4) macht.

Es ist nützlich, sich die ganzzahligen Lösungen von (4) unter dem Bilde eines $(k-3)$ dimen-

sionalen „Gitters" im k-dimensionalen Raum vorzustellen. Unter „Gitter" wird eine Anordnung äquidistanter auf äquidistanten und parallelen Geraden liegender Punkte im Raum verstanden. Man denke sich etwa im dreidimensionalen Raum eine Ebene, die nur gewisse Punkte mit ganzzahligen Koordinaten enthält. Alle diese Punkte zusammen bilden ein ebenes Gitter, d. h. sie sind die Kreuzungspunkte zweier Scharen paralleler, in gleichen Abständen gezogener Geraden auf der Ebene. Die Maxwellsche Lösung liefert einen Punkt des durch (4) bestimmten $(k-3)$ dimensionalen Raumes, aber im allgemeinen keinen Gitterpunkt.

2. Beweis auf Grund der Stirlingschen Formel.

Man stützt einen Beweis für den in (1) angeführten Satz auf die sog. Stirlingsche Formel, nach der mit Annäherung für große n

$$n! = n^n e^{-n} \tag{5}$$

gesetzt werden darf. Führt man diesen Ausdruck in (3) ein, so erhält man

$$\log \text{nat}\, N = \sum_{i=1}^{k} n_i \log \text{nat}\, n_i - \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

hat also wegen (4), mit λ, μ, ν als unbestimmten Konstanten,

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \log \text{nat}\, n_i + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^{k} n_i + \mu \sum_{i=1}^{k} n_i v_i + \nu \sum_{i=1}^{k} n_i v_i^2$$

zu einem Extremum zu machen. Dies ergibt die k-Gleichungen:

$$\log \text{nat}\, n_i = -\lambda - \mu v_i - \nu v_i^2, \; (i = 1, 2, \ldots k), \tag{6}$$

wobei λ, μ, ν aus (4) zu bestimmen sind. Man sieht, daß auf diese Weise sich als einziges Extremum $n_i = m_i$ mit der in (1) gegebenen Bedeutung von m_i ergibt.

Zunächst wird zu bemerken sein, daß die gefundenen m_i im allgemeinen keine ganzen Zahlen sein können. Allein die Ungenauigkeit der Annäherung (5) ist vielleicht noch viel bedeutender als der Unterschied zwischen den m_i und den nächst benachbarten ganzzahligen Lösungen von (4). Man muß ja bedenken, daß die Lage eines Extremums sich bei Verwendung einer Annäherung nur mit sehr großen Fehlergrenzen ergibt. Schwerwiegender ist noch der Einwand, daß die gefundenen m_i zum Teil sehr kleine Zahlen sein können, während die Annäherung (5) nur für große n_i gilt, so daß man gar nicht übersehen kann, wie weit das Resultat noch brauchbar ist. Es ist auch nicht sicher, ob N, das eine Funktion der ganzzahligen n_i ist, nicht auch Spitzenwerte aufweist, die bei Annäherung durch eine stetige Funktion gar nicht als Extrema zur Geltung kommen. Schließlich wird man verlangen dürfen, daß die Lösung des Problems, das nur für ganzzahlige n_i einen Sinn hat, unabhängig von jeder Festsetzung über die Bedeutung von $n!$ bei nicht ganzen n erfolgt. Wir geben im folgenden einen diesen Forderungen genügenden Beweis für den in (1) angedeuteten Satz.

3. Hilfssatz über Fakultäten.

Sind a und $a + x$ natürliche Zahlen, so sieht man ohne weiteres ein, daß

$$\frac{(a+x)!}{a!\, a^x} \geq 1, \tag{7}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $x = 0$ und $x = -1$ gilt. Denn für positive x kann man durch $a!$ kürzen und es bleiben nur Faktoren wie $(a+1) : a$, $(a+2) : a \ldots$. Bei negativem x kürzt man durch den Zähler und es bleiben die Faktoren $a : a$, $a : (a-1)$, $a : (a-2) \ldots$. Beiderseits der Stellen, in denen der Quotient (7) den Wert eins besitzt, wächst er mit wachsendem Absolutwert von x unbeschränkt.

Wir betrachten nun etwas allgemeiner den Ausdruck

$$g(x) = \frac{(a+x)!}{a!\, m^x}, \tag{8}$$

wo m eine beliebige, nicht notwendig ganze, Zahl bedeutet. Die Funktion g der ganzzahligen Variablen x im Bereich $(-a+1)$ bis ∞ hat den Wert 1 für $x = 0$ und ist vollständig definiert durch

$$g(0) = 1, \quad \frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{a+x+1}{m}. \tag{9}$$

Bezeichnen wir mit ξ die größte ganze Zahl, die nicht größer als $m - a$ ist; also

$$0 \leq m - (a + \xi) < 1 \tag{10}$$

so folgt aus (9):

$$\begin{cases} \dfrac{g(x+1)}{g(x)} > 1 \text{ für } x > \xi \\ \dfrac{g(x+1)}{g(x)} \leq 1 \text{ für } x \leq \xi - 1. \end{cases} \tag{11}$$

Diese Ungleichungen besagen, daß $g(x)$ seinen kleinsten Wert für $x = \xi$ annimmt. Dieser Kleinstwert ist zufolge (9) mindestens gleich $(a : m)^{\xi}$. Denn bei positivem ξ ist $m > a$ und die Abnahme der $g(x)$ von einem x-Wert zum nächsten höchstens $a : m$; bei negativem ξ hat man $a > m$ und die Abnahme höchstens gleich $m : a$.

Nach beiden Seiten von der Stelle $x = \xi$ wächst g mit $|x - \xi|$ in stets steigendem Maße ins Unendliche. Wir haben also folgenden Hilfssatz:

Bezeichnen a und $a+x$ natürliche Zahlen, m eine beliebige reelle Zahl, $a+\xi$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als m ist, so gilt:

$$g(x) = \frac{(a+x)!}{a!\, m^x} \geq \left(\frac{a}{m}\right)^{\xi}, \qquad (12)$$

der Kleinstwert von g liegt bei $x = \xi$ und g wächst mit $|x-\xi|$ in unbeschränkt steigendem Maße ins Unendliche.

Auf Grund dieses Hilfssatzes werden wir nunmehr sofort den in 1 angedeuteten Satz beweisen.

4. Beweis des Hauptsatzes.

Nehmen wir zunächst an, die durch (1) dargestellte Lösung der Gleichungen (4) sei ganzzahlig. Wir bilden den Ausdruck

$$N(m) = m_1!\, m_2! \ldots\ldots m_k! \qquad (13)$$

und analog

$$N(m+x) = (m_1+x_1)!\,(m_2+x_2)! \ldots (m_k+x_k)!, \qquad (13')$$

wobei $m_i + x_i$ irgendeine von m_i verschiedene Lösung von (4) bezeichnen soll. Aus dem linearen Charakter der Gl. (4) folgt:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} v_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} v_i^2 x_i = 0. \qquad (14)$$

Wenden wir nun Gl. (7) an, indem wir für a der Reihe nach $m_1, m_2 \ldots\ldots$, für x entsprechend $x_1, x_2 \ldots\ldots$ setzen, so erhalten wir:

$$\frac{N(m+x)}{N(m)} > m_1^{x_1} \cdot m_2^{x_2} \ldots\ldots m_k^{x_k}. \qquad (15)$$

Das Gleichheitszeichen kann wegbleiben, da zufolge (14) nicht alle x_i gleichzeitig den Wert -1 haben können. Setzt man rechts in (15) die Werte aus (1) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (14):

$$m_1^{x_1} \cdot m_2^{x_2} \ldots\ldots m_k^{x_k} = A^{\sum x_i} e^{-h^2(\sum v_i^2 x_i - 2c\sum v_i x_i + c^2 \sum x_i)} = 1. \qquad (16)$$

Es ist somit $N(m+x) > N(m)$, w. z. b. w.

Sind nun nicht alle m_i ganzzahlig, dann wählen wir eine möglichst nahe benachbarte ganzzahlige Lösung $a_1, a_2 \ldots\ldots a_k$ von (4) und bezeichnen analog wie oben mit $N(a)$ bzw. $N(a+x)$ den Wert des Ausdruckes (3), wenn darin für n_i einmal a_i und einmal $a_i + x_i$ gesetzt wird. Die $a_i + x_i$ sind ganze Zahlen, die (4) erfüllen, so daß wieder (14) gilt. Mit Rücksicht auf (16) besagt jetzt (8):

$$\frac{N(a+x)}{N(a)} = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \ldots\ldots g_k(x_k). \qquad (17)$$

Die Indizes an den g sollen darauf hindeuten, daß die Parameter a und m der Funktion g der Reihe nach die Werte $a_1, m_1; a_2, m_2 \ldots\ldots$ annehmen. Die rechte Seite von (17) ist nun nicht mehr für beliebige x_i größer als 1. Dies ist aber auch gar nicht zu verlangen, da ja $a_1 \ldots a_k$ ein beliebiger Punkt in der Umgebung von m_i war. Bezeichnet $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_k$ die ganzen Zahlen, die der zu (10) analogen Bedingung

$$0 \leq m_i - (a_i + \xi_i) < 1 \qquad (18)$$

genügen, so folgt aus (12):

$$g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \ldots\ldots g_k(x_k) \geq g_1(x_1) \cdot \left(\frac{a_2}{m_2}\right)^{\xi_2} \left(\frac{a_3}{m_3}\right)^{\xi_3} \ldots \ldots \left(\frac{a_k}{m_k}\right)^{\xi_k}. \qquad (19)$$

Hierin sind alle Faktoren rechts bis auf den ersten von der Wahl der x_i unabhängig. Dieser erste Faktor wächst aber, nach dem Hilfssatz mit $|x_1 - \xi_1|$ ins Unendliche. Man kann also sicher ein X_1 so wählen, daß für alle $|x_1 - \xi_1| \geq X_1$ der Ausdruck rechts in (19) größer als 1 wird. Dasselbe gilt für die Indizes $2, 3, \ldots\ldots k$ und man sieht daher, daß es ein durch gewisse Zahlen $X_1, X_2 \ldots\ldots X_k$ genau bestimmtes Gebiet um den Punkt $a+\xi$ herum geben muß, außerhalb dessen das Minimum von N nicht liegen kann, weil dort $N(a+x)$ größer ist als $N(a)$. Es handelt sich nur noch darum, wie sich die X_i der Größenordnung nach verhalten, ob nicht etwa das durch sie bestimmte Gebiet alle positiven Lösungen von (4) umschließt. Um dies zu untersuchen, sehen wir nach, was bei Vergrößerung von n aus den X_i wird.

Seien einmal die Konstanten der Gl. (4), sämtliche v_i, sowie v_0, v_{00} und n gegeben und sei die diesen Angaben entsprechende Lösung m_i gefunden. Dazu sei dann ein benachbarter Gitterpunkt a_i gewählt, das zugehörige ξ_i bestimmt und schließlich der Bereich X_i nach dem eben dargelegten Verfahren abgegrenzt. Nehmen wir nun an, das Problem werde nochmals mit denselben v_i, v_0 und v_{00}, aber mit λ-mal vergrößertem n, also mit $n' = \lambda n$ gestellt, wobei λ eine große ganze Zahl bezeichnet. Alle auf die neuen Angaben bezüglichen Größen wollen wir mit Akzenten bezeichnen. Die neue Maxwellsche Lösung ist, wie man sofort sieht, $m_i' = \lambda m_i$. Der benachbarte Gitterpunkt a_i' kann aber, wenn λ genügend groß ist, sicher „günstiger" gewählt werden als mit λa_i, nämlich näher an m_i' liegend, da nach den Gesetzen der „diophantischen Approximationen" jeder irrationale Wert durch größere ganze Zahlen besser approximiert werden kann. Überdies gilt auch

$$a_i' + \xi_i' \geq \lambda(a_i + \xi_i), \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots k), \qquad (20)$$

wenn wieder $a_i' + \xi_i'$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als m_i' ist. Man kann demnach durch hinreichend große Wahl von λ

erreichen, daß der Quotient $a_i' : m_i'$ beliebig nahe an 1 und daß $\xi_i' : \lambda$ beliebig nahe an Null liegt. Wird daher irgendein $\eta > 1$ gewählt, so kann man ein λ so finden, daß

$$\left(\frac{a_i'}{m_i'}\right)^{\frac{\xi_i'}{\lambda}} > \frac{1}{\eta} \cdot \quad (i = 1, 2, \ldots k) \qquad (21)$$

Es werde nun verlangt, daß der Unterschied zwischen der Maxwellschen Lösung und der Stelle des wirklichen Minimums von N, also der größte Wert der X_i, nicht mehr als q-mal der Gesamtzahl n' aller Moleküle betrage, wo q eine beliebig vorgegebene kleine Zahl sei. Wir wählen n zunächst so, daß

$$n > \frac{2}{q} \qquad (22)$$

und überdies derart, daß das kleinste der m_i größer als 2 ist. Die Punkte m, a und $a + \xi$ sind dadurch bestimmt. Die kleinere der beiden Zahlen $(a_1 + \xi_1 + 1) : m_1$ und $m_1 : (a_1 + \xi_1)$, die beide größer als 1 sind, bezeichnen wir mit $\eta^{\frac{1}{k}}$, also mit η die positive, reelle k-te-Wurzel daraus. Bestimmen wir nun diesem η entsprechend λ nach (21), so erhalten wir zufolge der Definition der g in (11):

$$g_1'(q\lambda n + \xi_1') > \left(\frac{a_1'}{m_1'}\right)^{\xi_1'} \cdot \frac{a_1' + \xi_1' + 1}{m_1'} \cdot \qquad (23)$$

$$\frac{a_1' + \xi_1' + 2}{m_1'} \cdots\cdots \frac{a_1' + \xi_1' + q\lambda n}{m_1'} > \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda} \cdot \eta^{\lambda k},$$

weil unter den $q\lambda n > 2\lambda$ Faktoren, die neben dem Klammerausdruck stehen, wenigstens λ Faktoren größer als

$$\frac{a_1' + \xi_1' + \lambda}{m_1'} > \frac{\lambda(a_1 + \xi_1 + 1)}{\lambda m} > \eta^{\frac{1}{k}}$$

sich befinden. Benutzt man nochmals die Ungleichung (21), so erhält man für den Ausdruck (19):

$$g_1'(q\lambda n + \xi_1') \cdot \left(\frac{a_2'}{m_2'}\right)^{\xi_2'} \cdots \left(\frac{a_k'}{m_k'}\right)^{\xi_k'} > \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda} \cdot$$

$$\cdot \eta^{\lambda k} \cdot \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\lambda(k-1)} = 1, \qquad (24)$$

womit bewiesen ist, daß für $x_1' - \xi_1' = q \quad n = qn$ die Grenze X_1' erreicht ist, außerhalb der sich das Minimum von N nicht finden kann. Ganz analog beweist man, mit Rücksicht auf die Bedeutung von η auch dasselbe für $x_1' - \xi_1' = -q\lambda n$. Denn auch unter den Faktoren

$$\frac{m_1'}{a_1' + \xi_1'} \cdot \frac{m_1'}{a_1' + \xi_1' - 1} \cdot \cdots \cdot \frac{m_1'}{a_1' + \xi_1' - q\lambda n + 1}$$

befinden sich wenigstens λ, deren Wert größer ist als $m_1 : (a_1 + \xi_1)$, also auch größer als η. — Dieselbe Überlegung, die hier für x_1' angestellt wurde, wiederholt man ohne Schwierigkeit für jeden andern der k-Indizies und braucht nur den größten der so errechneten λ-Werte zu nehmen, um folgenden Satz in seinem ganzen Umfang erwiesen zu sehen:

Ist die Maxwellsche Lösung m nach (1) eine ganzzahlige Lösung von (4), so macht sie N zu einem absoluten Minimum, hat also die größte Wahrscheinlichkeit; sind die m_i nicht sämtlich ganze Zahlen, so gibt es in der Umgebung des Punktes m (im $k-3$ dimensionalen Raum, der durch (4) aus dem k dimensionalen Raum der n_i herausgehoben wird) ein begrenztes Gebiet, in dem das absolute Minimum von N liegt; wird unter sonst gleichbleibenden Verhältnissen die Gesamtzahl $n = \Sigma n_i$ hinreichend groß, so reduzieren sich die Abmessungen dieses Gebietes, in das das Minimum von N hineinfällt, auf einen beliebig klein vorgegebenen Bruchteil von n.

5. Zahlenbeispiel.

Die Bedeutung und die Anwendbarkeit unseres Hauptsatzes wird durch ein Zahlenbeispiel klarer werden. Wir nehmen an, die Geschwindigkeit v_i habe die ganzzahligen Werte zwischen -4 und $+4$ und der quadratische Mittelwert der Geschwindigkeiten sei $v^2_{00} = 4$. Dann verschwindet, der Symmetrie wegen, die Konstante c in der Maxwellschen Formel (1) und die Konstante h^2 ist aus der Gleichung

$$\frac{\Sigma \lambda^2 e^{-\lambda^2 h^2}}{\Sigma e^{-\lambda^2 h^2}} = 4 \quad (\lambda = -4, -3 \ldots 0 \ldots 4) \qquad (25)$$

zu bestimmen. Numerische Auflösung führt zu $h^2 = 0{,}0954$ und $e^{-\lambda^2 h^2} = 1,\ 0{,}90901,\ 0{,}68277,\ 0{,}42376,\ 0{,}21732$ für $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ und ± 4. Der Proportionalitätsfaktor A der Formel (1) läßt sich diesmal aus n ohne weiteres berechnen. Die diophantischen Gleichungen (4) gestatten bei den getroffenen Annahmen die Auflösung:

$$n_0 = -3n + 15n_{-4} + 8n_{-3} + 3n_{-2} + 3n_2 + 8n_3 + 15n_4 \qquad (26)$$

$$n_1 = 2n - 6n_{-4} - 3n_{-3} - n_{-2} - 3n_2 - 6n_3 - 10n_4$$

$$n_{-1} = 2n - 10n_{-4} - 6n_{-3} - 3n_{-2} - n_2 - 3n_3 - 6n_4.$$

Für die rechts stehenden 6 Veränderlichen kann jeder ganze positive Wert gesetzt werden, der den Ausdruck nicht negativ macht.

Wir nehmen nun der Reihe nach die Fälle $n = 30$, $n = 300$ und $n = 3000$ vor und wollen für jeden den Bereich, in dem das Minimum von N nach unserm Hauptsatz liegen muß, bestimmen.

Für $n = 30$ ergibt sich zunächst als Maxwellsche Lösung die in der zweiten Spalte der Tabelle I stehende Zahlenreihe, die aus den oben angegebenen Werten für $e^{-\lambda^2 h^2}$ durch Multiplikation mit $4{,}9893 = 30 : \Sigma e^{-\lambda^2 h^2}$ hervorgeht. Wir haben dann einen dem Maxwellschen Punkt möglichst naheliegenden Gitterpunkt, der (26) erfüllt, zu wählen. Wir tun das, indem wir $a_2 = a_{-2} = 3$, $a_3 = a_{-3} = 3$, $a_1 = a_{-1} = 1$ annehmen, weil die auf den ersten Blick näher liegende Annahme 4, 2, 1 keine positiven Lösungen von (26) gibt. Die gewählten und die aus (26) berechneten a_1 sind in der dritten Spalte der Tabelle I eingetragen. Aus den a_i und m_i folgen die in der vierten Spalte angeführten ξ_i, das sind nach (10) die Unterschiede zwischen den a_i und den größten in m_i enthaltenen ganzen Zahlen. Die fünfte Spalte enthält die aus der zweiten und vierten berechneten Werte von $(m : a)^{\xi}$, die für die Bestimmung der gesuchten Gebietsgrenzen nach (19) erforderlich sind. Man hat z. B. die Grenzen von x_0 so zu bestimmen, daß

$$g_0(x_0) \geqq H\left(\frac{m}{a}\right)^{\xi_\lambda} \quad (\lambda = \pm 1, +2, \pm 3, +4). \tag{27}$$

Die rechte Seite hat den Wert $(1{,}002 \cdot 1{,}289)^2 = 1{,}66$, die entsprechenden Werte für die folgenden Indizes enthält die sechste Spalte der Tabelle. Nun ist nach (8)

Tabelle I.

ν	m	a	ξ	$(m:a)^{\xi}$	$g$min	x min	x max
0	5,49	6	— 1	1,090	1,665	— 3	1
+ 1	4,99	5	— 1	1,002	1,814	— 2	2
+ 2	3,75	3	0	1	1,821	— 1	2
± 3	2,33	3	— 1	1,289	1,094	— 3	0
+ 4	1,19	1	0	1	1,821	— 1	1

$$g_0(2) = \frac{(a_0+2)!}{a_0!\, m_0^2} = \frac{7 \cdot 8}{5{,}49^2} = 1{,}86 > 1{,}66,$$

$$g_0(1) = \frac{7}{5{,}49} < 1{,}66;$$

$$g_0(-4) = \frac{(a_0-4)!}{a_0!\, m_0^{-4}} = \frac{5{,}49^4}{6,5,4,3,} = 2{,}53 > 1{,}66,$$

$$g_0(-3) = \frac{5{,}49^3}{6,5,4} < 1{,}66.$$

Demnach sind die äußersten Grenzen für x_0, wie in der letzten Spalte der Tabelle I angegeben, + 1 und — 3. In gleicher Weise sind die Grenzen für die übrigen Indizes bestimmt und in die Tabelle eingetragen worden.

Wenn n nicht 30, sondern 300 bzw. 3000 beträgt, findet man die in den zweiten Spalten der Tabelle II und III stehenden Werte der Maxwellschen Lösung m durch Verwendung des Proportionalitätsfaktors 49,893 bzw. 498,93 statt des oben verwendeten 4,9893. Die Punkte a mit ganzzahligen Koordinaten und daraus die ξ ergeben sich ohne weiteres, indem man die drei letzten m auf ganze Zahlen abrundet. Die beiden folgenden Spalten sind dann ohne Schwierigkeit zu berechnen. Aber auch die Grenzen für die x sind bei großen n nicht etwa umständlicher zu finden. Suchen wir z. B. für $n = 3000$ die Grenzen von x_0, so muß nach der ersten Zeile in Tabelle III der Wert von g_0

Tabelle II.

ν	m	a	ξ	$(m:a)^{\xi}$	$g$min	x min	x max
0	54,89	56	— 2	1,042	1,010	— 4	1
+ 1	49,89	49	0	1	1,083	— 2	3
+ 2	37,48	38	— 1	1,014	1,058	— 3	1
+ 3	23,26	23	0	1	1,083	— 2	1
+ 4	11,93	12	— 1	1,006	1,070	— 1	0

Tabelle III.

ν	m	a	ξ	$(m:a)^{\xi}$	$g$min	x min	x max
0	548,88	548	0	1	1,00523	— 2	2
+ 1	498,93	499	— 1	1,000140	1,00495	— 2	1
+ 2	374,75	375	— 1	1,000754	1,00372	— 2	1
+ 3	232,60	233	— 1	1,001720	1,00179	— 2	0
+ 4	119,29	119	0	1	1,00523	— 1	0

größer oder mindestens gleich gemacht werden 1,00523. Nun ist

$$g_0(1) = \frac{549}{548{,}88} = 1{,}000218,$$

$$g_0(2) = g_0(1) \cdot \frac{550}{548{,}88} = 1{,}00226,$$

$$g_0(3) = g_0(2) \cdot \frac{551}{548{,}88} = 1{,}00551 > 1{,}00523.$$

Demnach ergibt sich $x_0 \leqq 2$, wie in der letzten Spalte der Tabelle III eingetragen.

Die Bedeutung der in der Tabelle enthaltenen Ergebnisse liegt darin, daß damit bewiesen ist, das Minimum von N werde in einem Punkt $a_i + x_i$ sicher erreicht, dessen a_i die Werte der Spalte 3 und dessen x_i die Grenzen der Spalte 5 besitzen. Suchen wir im Sinne unseres Hauptsatzes die Größe des um m_i liegenden Gebietes im Verhältnis zu n zu bestimmen, so müssen wir den größtmöglichen Wert von $(a_i - m_i + x_i)$ aufsuchen und durch n dividieren. Dieser größte Wert tritt in allen drei Fällen bei der unteren Grenze von x_0 ein und beträgt der Reihe nach 2,49, 2,89, 2,88, also im Verhältnis zu n: 0,083,

0.0096, 0,00096. Damit ist das „Engerwerden" des Gebietes im Sinne des Hauptsatzes zur Anschauung gebracht.

Die gefundenen Grenzen für die x_i können aber noch weiter ausgenützt werden, um die genaue Lage des Minimums von N durch Probieren zu finden. Beschränken wir uns auf symmetrische Lösungen, also solche, für die $n = n_{-i}$ ist, so folgt aus der Gl. (26):

$$\begin{aligned} -4x_2 - 9x_3 &= x_1 + 16x_4 \\ 6x_2 + 16x_2 &= x_0 - 30x_4. \end{aligned} \qquad (28)$$

Setzt man für x_4 einen der nach der Tabelle zulässigen Werte ein, für x_0 und x_1 die beiden Grenzen, so stellt (28) jedesmal zwei Geradenpaare in einem x_2/x_3-Koordinatensystem dar. Es sind nun jene Gitterpunkte zu suchen, welche in den von den Geradenpaaren eingeschlossenen Bereichen liegen und den Ungleichungen für x_2 und x_3 entsprechen. Führt man die Konstruktion durch, so zeigt sich, daß im Falle $n = 30$ allein die Lösung $x_0 = -2$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$ möglich ist, in den Fällen $n = 300$ und $n = 3000$ überhaupt keine. In diesen beiden Fällen muß demnach der Punkt mit den Koordinaten a_i die genaue Stelle des Minimums von N bilden. Im Falle $n = 30$ bringen wir die noch offene Frage dadurch zur Entscheidung, daß wir

$$g_0(-2)\cdot[g_1(2)\cdot g_2(0)\cdot g_3(-2)\cdot g_4(1)]^2 = \frac{5.49^2}{6,5}\left[\frac{6,7}{4,99^2}\cdot 1\cdot\frac{2,33^2}{3,2}\cdot\frac{2}{1,19}\right]^2 = 6,6$$

bilden. Da dieser Wert größer als 1 ist, so folgt, daß auch für $n = 30$ der willkürlich in der Nähe von m gewählte Punkt a die genaue Lage des Minimums darstellt.

Wien, am 11. Januar 1918.

(Eingegangen 11. Januar 1918.)

Über die spezifischen Wärmen von Blei-Antimonlegierungen.

Von R. Durrer.

Besitzen die beiden Komponenten eines binären Systems in einem bestimmten Konzentrationsgebiet im festen Zustande vollständige Nichtmischbarkeit, so soll nach Tammann[1]) die spezifische Wärme der Legierungen bei konstanter Temperatur innerhalb dieses Gebietes eine lineare Funktion der Konzentration sein. Untersuchungen hierüber liegen vor bei den Systemen *Bi-Sn*[1]), *Fe-Fe*$_3$ *C*[2]) und *Bi—Cd*[1]) Bei Wismut-Zinnlegierungen zeigt nach O. Richter[3]) die Kurve der spezifischen Wärmen einen nach unten konkaven Verlauf. Gleichgerichtete, aber größere Abweichungen von der Geraden besitzen Wismut-Bleilegierungen. Die spezifischen Wärmen beider Systeme sind zwischen 0 und 100° bestimmt worden. A. Meuthen[4]) hat gefunden, daß die spezifischen Wärmen von Eisen-Kohlenstofflegierungen, die er zwischen 630 und 0 bzw. 700 und 0° untersucht hat, auf zwei Geraden liegen, die sich bei der Konzentration von 0,95 Proz. schneiden. Im Gegensatz zu diesen Abweichungen vom linearen Verlauf haben die Untersuchungen von M. Levin und H. Schottky[5]) für die spezifischen Wärmen zwischen 17 und 100° für Wismut-Cadmiumlegierungen und Eisen-Kohlenstofflegierungen Größen ergeben, die sich innerhalb der Versuchsfehler mit dem nach der Mischungsregel berechneten decken.

Das gleiche gilt nach den im folgenden mitgeteilten Versuchen für die spezifischen Wärmen der Blei-Antimonlegierungen in dem Temperaturintervall von 20 bis 100°.

Versuchsmaterial.

Antimon, bezogen von E. Merck, bezeichnet als reinstes Antimon,
Blei, bezogen von C. A. F. Kahlbaum, bezeichnet als reinstes Stangenblei.

Messungen.

Die spezifischen Wärmen wurden nach der Mischungsmethode mit dem von Levin und Schottky[6]) benutzten Wasserkalorimeter bestimmt.

Kontrollversuche.

Der Wasserwert des Kalorimeters ist von Levin und Schottky dadurch bestimmt worden, daß mehrere Versuche mit Blei zwischen 10 und 100° ausgeführt, die spezifische Wärme des Bleis nach Angaben der Literatur zu 0,03090 angenommen und hieraus der Wasserwert berechnet wurde. Aus den ausgeführten Versuchen ergab sich in vorliegender Arbeit unter Annahme des von Levin und Schottky gefundenen Wasserwertes für

1) G. Tammann, Zeitschr. f. phys. Chem. **63**, 130, 1908.

1) Schmelzdiagramm s. b. Bornemann: Die binären Metallegierungen, II. Halle 1912, S. 94 u. 105.
2) Schmelzdiagramm s. z. B. P. Goerens: Einführung in die Metallographie, 2. Aufl. Halle, 1915.
3) O. Richter, Diss. Marburg, 1908.
4) A. Meuthen, Ferrum 10, 1, 1912.
5) M. Levin und H. Schottky, Ferrum 11, 193, 1913.
6) a. a. O.

die spezifische Wärme des Bleis im Mittel der Wert 0,03084, der mit dem von Levin und Schottky angenommenen Wert innerhalb der Versuchsfehler übereinstimmt.

Ferner wurden die spezifischen Wärmen von Antimon und einer Legierung von Eisen mit 0,17 Proz. in dem Temperaturintervall von 20 bis 100° bestimmt und mit den Ergebnissen früherer Untersuchungen verglichen.

Die Resultate sind in Tabelle I zusammengestellt. Die Werte der spezifischen Wärmen von Eisen mit 0,17 Proz. stimmen überein; die Werte der vorliegenden Arbeit der spezifischen Wärme von Antimon liegen im Mittel um 1,5 Proz. tiefer als die Werte der Literatur, was wahrscheinlich auf Verschiedenartigkeit des Versuchsmaterials zurückzuführen ist.

Tabelle I.

Metall	Beobachter	Spezifische Wärme zwischen ca. 16 u. 100°		
		ältere Angaben	Mittel aus den älteren Angaben	Eigene Resultate
Antimon	Gaede	0,0500	0,05055	0,04981
	Jaeger u. Diesselhorst	0,0508		
	Schimpff	0,0503		
	Levin u. Schottky	0,05111		
Eisen mit 0,17 Proz. C	Levin u. Schottky	0,01118	0,01118	0,01118

Tabelle II.

Gew.-Proz. Pb.	Beginn der primären Ausscheidung	Eutektische Temperatur	Zeitdauer der eutektischen Kristallisation ber. für gleiche Gewichtsmengen
0,00	631	—	—
21,02	590	248	36
40,17	534	249	72
59,20	446	249	114
80,01	316	249	180
90,08	258	249	180
100,00	327	—	—

Versuchsergebnisse.

Die Legierungen wurden durch Zusammenschmelzen der Komponenten in Glasröhren in einer Stickstoffatmosphäre hergestellt. Zur Aufnahme der Abkühlungskurven wurde ein *Pt-Pt-Rh*-Thermoelement benutzt, dessen Angaben mit Hilfe der Schmelzpunkte von Zinn (231°), Blei (327°), Zink (419°) und Antimon (631°) korrigiert wurden. Mit Rücksicht auf die bei den Blei-Antimon-Schmelzen vorhandene starke Neigung zu Seigerungen wurden die Schmelzen stark gerührt. Die Ergebnisse der Schmelzversuche sind in Tabelle II zusammengestellt.

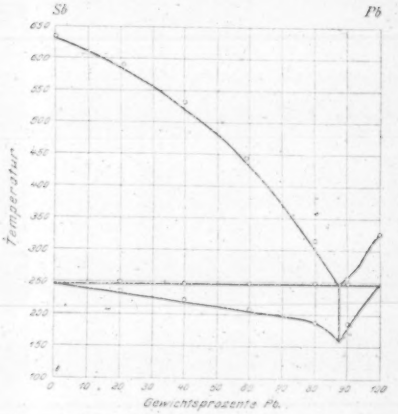


Fig. 1.

In der Fig. 1 ist das von Bornemann[1]) auf Grund der Versuche von Gontermann[2]) gezeichnete Schmelzdiagramm des Systems Blei-Antimon wiedergegeben. Die bei vorliegenden Untersuchungen beobachteten Punkte sind als Kreise in das Diagramm eingezeichnet. Die Temperaturen des Beginnes der primären Ausscheidung von reinem Antimon liegen nach vorliegenden Versuchsergebnissen etwa 10° höher als nach den Angaben von Gontermann.

Nach dem Diagramm bestehen die erstarrten Schmelzen aus Konglomeraten von Kri-

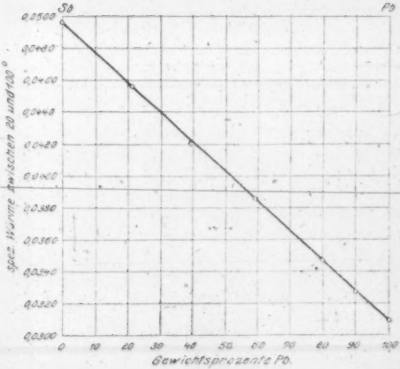


Fig. 2.

1) a. a. O.
2) Zeitschr. f. anorg. Chem. 55, 419. 1907.

stallen der beiden Komponenten Blei und Antimon, was durch die Ergebnisse der von Gontermann ausgeführten mikroskopischen Untersuchung der Reguli bestätigt wird.

Gontermann gibt an, daß zwischen 20 und 80 Gewichtsprozent *Pb* anstatt eines einheitlichen eutektischen Haltepunktes deren zwei nur 4 bis 6° auseinanderliegende auftreten. Bei vorliegenden Versuchen zeigte von fünf Abkühlungskurven, die von der Legierung mit 80 Proz. *Pb* aufgenommen wurden, nur eine einen zweiten Haltepunkt, der um 5° tiefer liegt. Von vier Abkühlungskurven der 60 proz. Legierung zeigte ebenfalls eine einen zweiten Haltepunkt, der um 5° tiefer liegt. Bei den übrigen Abkühlungskurven trat dieser zweite Haltepunkt nicht auf.

Vor Ausführung der kalorimetrischen Bestimmung wurden die Reguli mit einer axialen Bohrung zur Aufnahme des Thermometers versehen. Infolge der in den Proben vorhandenen Seigerungen erfuhr die Zusammensetzung der Proben durch das Ausbohren eine Änderung; es war daher noch eine nachträgliche Analyse der Proben notwendig.

Die für die spezifische Wärme der Legierungen erhaltenen Werte sind in Tabelle III und Fig. 2 wiedergegeben. Man erkennt, daß die spezifische Wärme sich innerhalb der Versuchsfehler linear mit der Konzentration ändert. Diese Gerade gehorcht der Gleichung:

$$s = 0{,}04965 - 0{,}0001884 \cdot K,$$

in der s die spezifische Wärme, K die dazugehörige Konzentration bedeutet. Die Konstanten sind aus den Versuchsergebnissen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet.

Die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werten sind stets kleiner als 0.4 Proz. und liegen damit innerhalb der Grenze der Versuchsfehler.

Tabelle III.

No.	Gewichtsprozente Blei	Spezifische Wärme beobachtet	Spezifische Wärme berechnet	Differenz s beob. — s ber.	Differenz in Proz.
1	0,00	0,04970	0,04965	+0,00005	+0,10
2	21,02	0,04564	0,04569	−0,00005	−0,11
3	40,17	0,04107	0,04208	−0,00011	−0,26
4	59,20	0,03865	0,03850	+0,00015	+0,39
5	80,01	0,03455	0,03457	−0,00002	−0,06
6	90,08	0,03202	0,03268	−0,00006	−0,18
7	100,00	0,03084	0,03081	+0,00003	+0,10

(Eingegangen 28. Januar 1918.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Die Hauptsätze der Lehre von den flüssigen Kristallen.

Von O. Lehmann.

(Fortsetzung von S. 73 und Schluß.)

16. Erzwungene Homöotropie, homogene Netze.

Werden zwei Glasplatten, zwischen welchen sich schleimig-flüssige Kristalle befinden, kräftig gegeneinander verschoben, so stellen sich die Molekülachsen (und demgemäß die Längsrichtungen der Kristalle) senkrecht zur Verschiebungsrichtung (ähnlich wie die Achsen von Lenkrollen). Dies ist augenscheinlich die Richtung geringsten Widerstandes (Fig. 18). Sind die Kristalle hinreichend dicht gehäuft, so können hierbei durch Zusammenfließen derselben netzartig durchbrochene oder völlig zusammenhängende ausgedehnte Lamellen von einheitlicher Struktur entstehen[1]).

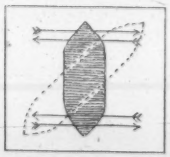


Fig. 18.

17. Flüssige Mischkristalle, künstliche Färbung, Diffusion.

Flüssige Kristalle können auch, ebenso wie feste, Mischkristalle bilden[2]), überhaupt fremde Moleküle in regelmäßig orientierter Stellung[3]), aufnehmen, z. B. Farbstoffmoleküle, in welch letzterem Fall sie künstlich dichroitisch gefärbt

1) Ann. d. Phys. **12**, 318, 1903; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 8, Fig. 1—4; diese Zeitschr. **8**, 386, 1907; Die neue Welt d. fl. Krist. 183, 1911; Ann. d. Phys. **50**, 586, 1616.

2) Wied. Ann. **41**, 525, 1890; Die neue Welt d. fl. Krist. 204, 1911; Ann. d. Phys. **2**, 686, 1900; **43**, 123, 1914.

3) Molekularphysik **1**, 393, 1888; Ann. d. Phys. **19**, 410, 1906; **43**, 122, 123, 1914; **47**, 832, 1915; Zeitschr. f. phys. Chem. **56**, 753, 1906; diese Zeitschr. **11**, 580, 1910.

werden [1]). Eine kristallinische Flüssigkeit kann somit auch als Lösungsmittel dienen wie eine gewöhnliche, doch zeigt sie erhebliches Lösungsvermögen nur für ähnlich zusammengesetzte flüssige Kristalle. Andere Stoffe, die etwa in der isotropen Schmelze gelöst waren, werden bei Bildung der flüssigen Kristalle ausgeschieden, ebenso wie sich ein solches Selbstreinigungsvermögen bei festen Kristallen zeigt (infolge Wirkung der molekularen Richtkraft).

18. Innere Lösung und Schmelzung, Überkühlung.

Insofern von flüssigen Kristallen auch etwas isotropes Lösungsmittel aufgenommen wird, zeigt sich beim Erwärmen nicht nur Lösung an der Oberfläche wie bei gewöhnlichen Kristallen, es treten auch im Innern Tröpfchen von Lösung auf, welche ellipsoidisch geformt und regelmäßig orientiert sind [2]). Fig. 19 stellt eine

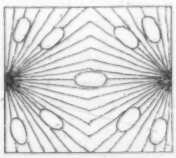


Fig. 19.

konische Störung mit entsprechend orientierten Tröpfchen dar. Vor dem Erstarren einer gewöhnlichen Schmelze ist die feste Modifikation in der flüssigen gelöst anzunehmen, so daß der Erstarrungspunkt als Sättigungspunkt dieser Lösung erscheint und unterkühlte Schmelze als übersättigte Lösung, deren Zähigkeit infolge des Anwachsens der Zahl fester Moleküle mit sinkender Temperatur erheblich steigt [3]). In gleicher Weise gilt dies für die Erstarrung kristallinischer Flüssigkeiten. Verdampfende flüssige Kristalle enthalten Dampf gelöst [4]).

1) Ann. d. Phys. **8**, 908, 1902; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 9, Fig. 1; R. Schenck, Kristallinische Flüssigkeiten u. fl. Krist., 1905; O. Lehmann, Ann. d. Phys. **16**, 160, 1905; Zeitschr. f. phys. Chem. **56**, 750, 1906; Ann. d. Phys. **21**, 181, 1906; diese Zeitschr. **11**, 575, 1910; Die neue Welt d. fl. Krist. 286, 1911; P. Gaubert, Compt. rend. **153**, 573, 1911; Bull. soc. min. **36**, 174, 1913; O. Lehmann, Ann. d. Phys. **43**, 124, 1914.

2) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 4, Fig. 34.

3) Molekularphysik **2**, 588, 1889; Wied. Ann. **41**, 525, 1890; Flüssige Kristalle 50, 85, 1904; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. **41**, 2045, 1908.

4) Flüssige Kristalle 248, 1904; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. **40**, 4527, 1907.

19. Polymorphie und Schraubenstruktur bei flüssigen Kristallen.

Ebenso wie ein Stoff in mehreren festen kristallinischen Modifikationen auftreten kann, können unter Umständen mehrere flüssig-kristallinische beobachtet werden. Beispielsweise zeigt Cholesterylkaprinat zwei solche Modifikationen, die sich bei bestimmter Umwandlungstemperatur vorwärts und rückwärts ineinander umwandeln wie die enantiotropen Modifikationen des Ammoniumnitrats. Der Stoff besitzt also drei flüssige Zustände, deren Moleküle notwendig verschieden sein müssen, in Widerspruch mit der alten Identitätstheorie der Aggregatzustände, welche das Faktum nicht zu erklären vermag [1]).

In der Nähe des Umwandlungspunkts zweier flüssig-kristallinischer Modifikationen derselben Substanz sind beide in einem von der Temperatur abhängigen Mengenverhältnis miteinander gemischt zu denken, denn die Kristalle besitzen Schraubenstruktur, wie sich durch Zirkularpolarisation und Drehung der Polarisationsebene zu erkennen gibt [2]).

20. Heterotropie, Lamellenbildung, Schillerfarben.

Durch Mischung der beiden Modifikationen erklärt sich die eigentümliche Erscheinung, daß die Grenze derselben nicht scharf, sondern verbreitert ist, falls sie als homogene angeschmiegte Schichten untersucht werden. Es findet dann vermutlich Bildung feiner Lamellen statt, welche abwechselnd mehr von der einen und andern Modifikation enthalten, denn nur so läßt sich das Auftreten von Schillerfarben unter

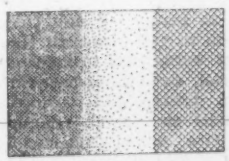


Fig. 20.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **56**, 750, 1906; **73**, 598, 1910; F. M. Jaeger, Proc. Amsterd. **9**, 359, 472, 1906; D. Vorländer, diese Zeitschr. **7**, 804, 1906; Zeitschr. f. phys. Chem. **57**, 357, 1907; O. Lehmann, Die scheinb. leb. Krist. 1907, 49, Fig. 86; diese Zeitschr. **17**. 243, Anm. 4, 1916.

2) Molekularphysik **2**, 510, 1888; Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 472, 1889; Ann. d. Phys. **2**, 669, 684, 1900; **52**, 527, 1917; D. Vorländer u. Fr. Janecke, Zeitschr. f. phys. Chem. **85**, 697, 1913; M. Ed. Huth, Diss. Halle 1909; D. Vorländer, Ber. d. D. chem. Ges. **41**, 2036, 2045, 1908.

enormer Zunahme der Intensität des reflektierten Lichtes erklären, sowie ähnlicher Farben zwischen gekreuzten Nicols, derart, daß die Grenze der beiden Modifikationen als Spektrum erscheint (Fig. 20)[1]. Ursache ist wahrscheinlich das Selbstreinigungsvermögen, welches Sonderung der Bestandteile (Heterotropie) anstrebt[2] (z. B. bei Cholesterylcinnamylat und -chlorid).

21. Gleichgewichtsveränderung durch Zusätze, farbige Höfe.

Zusatz einer fremden Substanz ändert die Breite der Mischzone und erzeugt farbige Höfe um deren Kristalle (Fig. 21), weil das Mi-

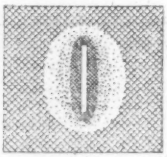


Fig. 21.

schungsverhältnis der beiden Modifikationen beeinflußt wird, wie man aus dem Einfluß auf die Umwandlungstemperaturen und die Stabilität der Modifikationen[3]) schließen kann. Auffallend ist dabei, daß die Sättigungskurven zuweilen bei bestimmtem Mischungsverhältnis (z. B. bei Cholesterylcaprinat und Paraazoxyanisol) abbrechen.

22. Erzwungen homogene tropfbarflüssige Kristalle.

Außer den schleimig-flüssigen Kristallen gibt es auch tropfbar-flüssige, deren Gestaltungskraft so gering ist, daß freischwebende Tropfen sich zu vollkommenen Kugeln gestalten. Zuerst wurde dies beobachtet bei Paraazoxyphenetol. Beim Erwärmen einer zwischen Glasplatten kristallinisch erstarrten festen Schicht bildet sich durch enantiotrope Umwandlung eine erzwungen-homogene flüssigkristallinische Schicht (Fig. 22) aus gleichem Grunde wie bei den schleimig-flüssigen Kri-

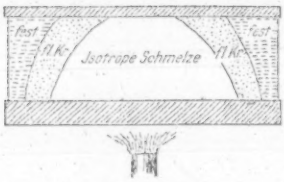


Fig. 22.

stallen. Die vom Glase in der regelmäßig orientierten Stellung, in der sie sich aus den festen Molekülen gebildet haben, fixierten flüssig-kristallinischen Moleküle bilden anisotrope Häutchen von großer Beständigkeit, welche mechanisch geprüft mehr den zähflüssigen als den tropfbar flüssigen Kristallen gleichen und sowohl bei Überschreitung der Umwandlungstemperatur in die isotrop-flüssige Modifikation wie auch bei Unterschreitung des Erstarrungspunktes noch Bestand behalten können, wenn die genannten Temperaturen nicht zu stark überschritten wurden. Infolge der Adsorptionswirkung des Glases ist wahrscheinlich das Mischungsverhältnis der im chemischen Gleichgewicht befindlichen Moleküle ein anderes als in der freien kristallinischen Flüssigkeit[1]).

Bei Anwendung eines linsenförmigen Deckglases zeigen die erzwungen homogenen Schichten zwischen gekreuzten Nicols Newtonsche Ringe, [eventuell mit Verwerfungen entsprechend der verschiedenen Orientierung der aneinandergrenzenden Felder (Fig. 23)], aus deren

Fig. 23.

Durchmesser die Brechungsindizes ermittelt werden können[2]).

23. Verdrehung homogener flüssigkristallinischer Schichten.

Werden die beiden Glasplatten gegeneinander verdreht und damit auch die auf die

1) Dichtere Schraffierung bedeutet die kältere Modifikation, dichtere Punktierung die rote Seite des Spektrums.

2) Diese Zeitschr. **7**, 578, 1906; **11**, 583, 1910; Zeitschr. f. phys. Chem. **73**, 598, 1910; Die neue Welt d. fl. Krist. 235, 1911; F. Giesel, diese Zeitschr. **11**, 192, 1910; F. Wallerant, Compt. rend. **143**, 605, 1906.

3) Wied. Ann. **41**, 525, 1890; R. Schenck u. Schneider, Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 546, 1899; R. Schenck, diese Zeitschr. **1**, 427, 1900; O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. **56**, 750, 1906; **73**, 598, 1910; Kristallisationsmikroskop 1910, 76, Tafel.

1) Wied. Ann. **40**, 408, 421, 1890; **41**, 525, 1890; Ann. d. Phys. **2**, 657, 663, 1900; **12**, 325, 1903; Flüssige Kristalle 1904, 51, § 13 u. 58; Die neue Welt d. fl. Krist. 222, 1911; diese Zeitschr. **11**, 580, 1910; Ann. d. Phys. **51**, 353, 1916.

2) Ann. d. Phys. **2**, 649, 1900; **18**, 808, 1905; **51**, 355, 1916; Siehe auch W. Voigt, diese Zeitschr. **17**, 76, 128, 152, 305, 1916.

übrigen Moleküle orientierend wirkenden adsorbierten Häutchen, oder kommen aus anderem Grunde verschieden orientierte Häutchen übereinander, so nimmt die zwischen ihnen

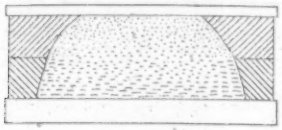


Fig. 24.

befindliche Masse (Fig. 24) Schraubenstruktur an, verhält sich also im polarisierten Licht nicht mehr wie ein einfacher fester Kristall wie vor der Verdrehung (Fig. 25 a u. b[1]), son-

Fig. 25 a.

Fig. 25 b.

dern zeigt z. B. Verdrehung der Richtung stärkster Absorption, [d. h. erscheint in verschiedener Farbe, je nachdem man das polarisierende Prisma vor oder hinter dem Präparat einschaltet (Fig. 26 a u. b bei 90° Dr.)] und Drehung der Polarisationsebene des Lichtes oder Umwandlung desselben in elliptisch- oder

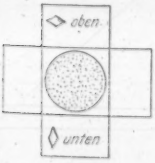


Fig. 26 a.

Fig. 26 b.

Fig. 27 a.

Fig. 27 b.

1) Rhomben = Nicols; Punktierung = Gelb.

Fig. 28 a.

Fig. 28 b.

zirkular-polarisiertes Licht[1]) (Fig. 27 a, b; 28 a, b; 29; 30 u. 31 jeweils beide Nicols gleichzeitig).

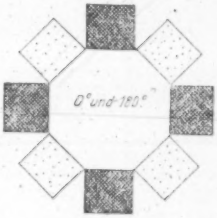


Fig. 29.

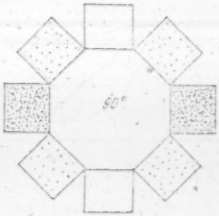


Fig. 30.

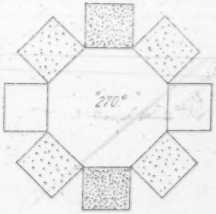


Fig. 31.

24. Verdrehung infolge von Orientierung durch feste Flächen.

Die orientierende Wirkung kann auch von

1) Ann. d. Phys. 51, 378, 1916; s. a. Ch. Mauguin, Compt. rend. 151, 1141, 1910.

andern anisotropen Flächen ausgehen statt von den beschriebenen Häutchen. Z. B. können erzwungen homogene Schichten erhalten werden durch Einbringen der flüssig-kristallinischen Masse in einen feinen frisch hergestellten Spalt eines Glimmerblatts[1]). Bei Verwendung eines Gipskristalls erhielt Mauguin[2]) Schichten mit schraubenförmig verdrehter Struktur; die beiden Flächen des Spaltes wirkten also in verschiedener Weise orientierend.

25. Erzeugung von Halbisotropie durch Adsorption.

Ebenso wie bei schleimig-flüssigen Kristallen kann auch hier die Adsorptionskraft des Glases Anschmiegung bedingen, so daß sich die ganze Schicht wie eine homogene einachsige Kristallplatte verhält, deren Achse senkrecht zur Glasplatte ist, auch wenn die Substanz an sich nicht einachsig ist[3]). In letzterem Falle zeigt sich rasch wechselnde Aggregatpolarisation[4]) infolge der thermischen Bewegung.

26. Einwirkung des Magnetismus auf homogene Schichten.

Auch durch Einwirkung eines Magnetfeldes können die Moleküle gerichtet werden. Ihre Hauptachsen (opt. Achsen) suchen dabei den Kraftlinien parallel zu werden, werden hieran aber durch die Wirkung des Glases gehindert, so daß eine Zwischenstellung gemäß dem Parallelogramm der Kräfte zustande kommt[5]).

27. Spurlinien, Spurflächen und Spurgebiete.

An den Grenzen verschieden orientierter erzwungen homogener Gebiete befinden sich die Moleküle ebenfalls in Zwischenstellung zwischen den beiden Orientierungen (Fig. 32), so

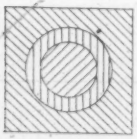


Fig. 32.

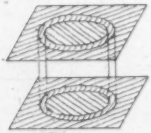


Fig. 33.

daß solche Spurlinien oder Spurstreifen oder Spurgebiete (Fig. 33) zwischen gekreuzten Nicols sich hell oder dunkel von den angrenzenden Feldern abheben[1]).

28. Das Selbstreinigungsvermögen tropfbar flüssiger Kristalle.

Bei der Ausscheidung der flüssigen Kristalle aus der isotropen Schmelze werden die in letzterer enthaltenen gelösten oder suspendierten Verunreinigungen nicht aufgenommen, sondern in die Zwischenräume zwischen die einzelnen Individuen zusammengedrängt[2]) (Fig. 34).

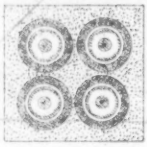


Fig. 34.

30. Ganze und halbe Fäden, mechanisches Verhalten.

Die Verunreinigungen, welche beim Wachsen der festen Kristalle in deren Zwischenräumen zusammengedrängt worden waren, finden sich nach der Umwandlung in die flüssig-kristallinische Modifikation an den Spurlinien als „Fäden" vor, d. h. als glatte dunkle Linien, die sich auch teilweise frei durch die kristallinische Flüssigkeit hindurch ziehen, insbesondere bei nicht in sich zurücklaufenden Spurlinien (Fig. 35). Beim Strömen der Masse

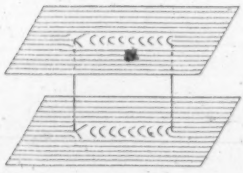


Fig. 35.

verlängern oder verkürzen sie sich beliebig, können sich auch zerteilen und verbinden, so daß anzunehmen ist, das Wesentliche sei eine Störung der Struktur, welche noch fortbestehen

1) Die neue Welt der fl. Krist. 1911, 203 Anm. u. 223 Anm.

2) Ch. Mauguin, Compt. rend. **156**, 1246, 1913.

3) Die scheinb. lebenden Krist. 1907, 52, Fig. 90. Die von dem stäbchenförmigen Kristall hervorgebrachte Störung beruht auf Aufzehrung, nicht, wie angegeben, auf direkter Einwirkung auf die tropfbar flüss. kr. Masse.

4) Ch. Mauguin, Compt. rend. **154**, 1359, 1912.

5) Ann. d. Phys. **2**, 675, 676, 1900; Ch. Mauguin, Compt. rend. **152**, 1680, 1911.

1) Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, 23; Ann. d. Phys. **52**, 445, 1917.

2) Diese Zeitschr. **11**, 44, 1910; Umschau **14**, 951, 1910; Ann. d. Phys. **47**, 833, 1915.

kann, nachdem der fremde Gehalt verschwunden ist. Kleine Partikelchen bleiben auch in diesem Falle noch an den Fäden kleben[1]).

31. Ganze und halbe Kern- und Konvergenzhöfe.

Kommen die Enden eines solchen Fadens mit der freien Oberfläche in Berührung, so breitet sich dort die Strukturstörung aus (Fig. 36 a u. b). Die Anordnung der Molekülachsen

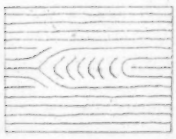


Fig. 36a.

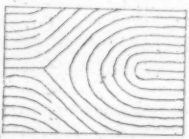


Fig. 36b.

wird eine radiale oder hyperbelartige. Entsprechend unterscheidet man Kern- und Konvergenzfäden. Die Struktur ist im einfachsten Falle auf der einen Hälfte normal (parallele Achsen), die Fäden werden dann als „halbe"

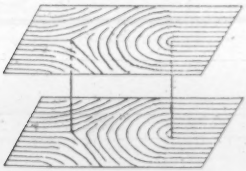


Fig. 37.

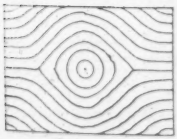


Fig. 38a.

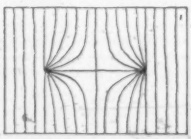


Fig. 38b.

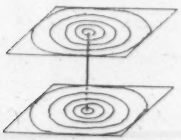


Fig. 38c.

1) Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, 23; Ann. d. Phys. **52**, 445, 1917; H. Deischa, Zeitschr. f. Krist. **50**, 28, 1911.

bezeichnet[1]). Durch Vereinigung von halben Fäden entstehen „ganze" (Fig. 38 a—c, 39 a—c).

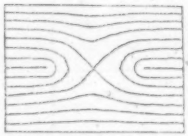


Fig. 39a.

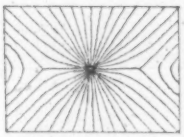


Fig. 39b.

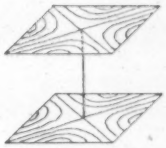


Fig. 39c.

32. Fäden mit isotropem Hof und halbisotropem Mantel.

Der Faden kann ferner von einem zylindrischen an beiden Enden spitz zulaufenden Gebiet umgeben sein, in welchem die Lage der Moleküle eine regellose ist, so daß es sich völlig optisch isotrop verhält, obschon es keineswegs mit der isotropen Schmelze identisch ist, deren Moleküle ja andere Beschaffenheit haben (Fig. 40 u. 41). Da der Brechungsindex des isotropen Hofes übereinstimmt mit dem kleine-

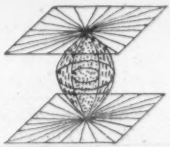


Fig. 40.

Fig. 41.

ren Brechungsindex des halbisotropen Mantels, tritt an den Enden, falls die Polarisationsrichtung des Lichtes dem größeren Brechungsindex entspricht (wobei das Feld nicht wie im entgegengesetzten Falle weiß, sondern gelb erscheint), eine starke Lichtbrechung ähnlich wie bei Konkavlinsen ein, so daß, falls die Molekülachsen radial (d. h. die Blättchen in konzentrischen Kreisen) um das Fadenende angeordnet sind, die gelben Felder in schwarze

1) Flüssige Kristalle 1904, Taf. 13—16; Ann. d. Phys. **52**, 445, 1917. Der Stoff ist Paraazoxyphenetol.

Sektoren auslaufen (Fig. 42 u. 43). Im natürlichen Licht, das aus zwei zueinander senkrecht polarisierten Strahlen bestehend gedacht

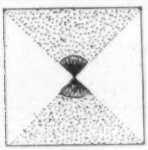


Fig. 42.

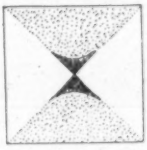


Fig. 43.

werden kann, erscheint deshalb ein senkrecht stehender Faden dieser Art, zu einem schwarzen Punkt (Kernpunkt) verkürzt und von einem runden grauen Hof umgeben (Fig. 44). Bei

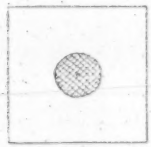


Fig. 44.

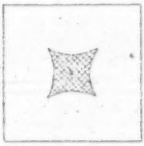


Fig. 45.

hyperbelartiger Anordnung der Achsen oder Blättchen erscheint der Punkt (Konvergenzpunkt) von einem viereckigen Hofe umgeben (Fig. 45). Gewöhnlich zeigen sich Serien

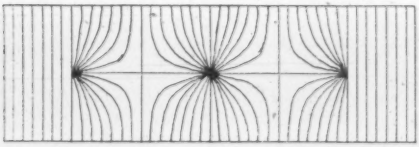


Fig. 46.

abwechselnder Kern- und Konvergenzpunkte, deren Strukturen zusammenhängen (Fig. 46 [1]).

Bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat beobachtet man nur Paare von halben Kern- und Konvergenzpunkten, weil die flüssigen Kristalle nicht durch Umwandlung der festen Kristalle entstehen, sondern durch deren Verbindung mit Wasser.

33. Kristallinische Lösungen, inneres Schmelzen, Überkühlung.

Ähnlich zusammengesetzte tropfbar flüssige Kristalle bilden in allen Verhältnissen Mischkristalle. Andere Stoffe werden nur in sehr geringem Maße von solchen flüssigen Kristallen in Lösung aufgenommen. Dabei zeigen sich entsprechende Änderungen der Umwandlungspunkte. Das Schmelzen erfolgt nicht nur an der Oberfläche, es bilden sich auch im Innern kugelige Tröpfchen isotroper Schmelze. Überkühlung unter den Erstarrungspunkt ist weniger leicht möglich als bei isotropen Schmelzen [1]). Das Existenzgebiet kann durch Zusätze vergrößert, auch Übergang von enantiotropen in monotrope Modifikationen erzielt werden.

34. Drehung der Polarisationsebene und der Absorptionsrichtung.

Fremde Beimischungen können schraubenförmige Verdrehung der Struktur bewirken, die entsprechende Änderungen des optischen Verhaltens zur Folge hat (Fig. 47 a—c; 48 a—c; 49 u. 50), so daß die Stellen, welche

Fig. 47a.

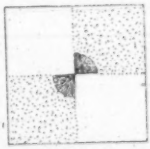


Fig. 47b.

Fig. 47c.

Fig. 48a.

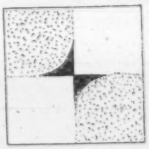


Fig. 48b.

Fig. 48c.

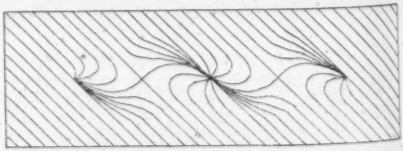


Fig. 49.

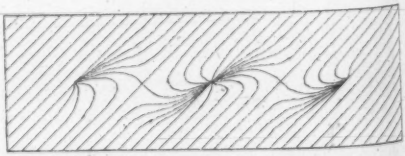


Fig. 50.

1) Ann. d. Phys. **52**, 463, 1917; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 13—16.

1) Wied. Ann. **41**, 525, 1890; Ann. d. Phys. **8**, 908, 1902; **16**, 160, 1905; **21**, 181, 1906; **35**, 214, 1911;

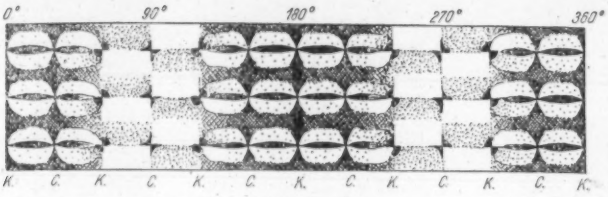


Fig. 51.

bei normaler Struktur zwischen gekreuzten Nicols dunkel erscheinen, z. B. die Kreuze bei Kern- (K) und Konvergenzpunkten (C) bei anderer Verdrehung der Nicols, z. B. bei Parallelstellung schwarz werden [1]). Bei keilförmiger Schicht sieht man deshalb abwechselnd helle und dunkle Zonen (Fig. 51), ebenso bei Anwendung eines linsenförmigen Deckglases, [wobei die Dicke von der Mitte nach dem Rande zunimmt] einen gleichmäßigen Wechsel heller und dunkler Ringe, die sich bei Drehung des Analysators erweitern oder verengern. Bei einfach polarisiertem Licht entsteht ein Wechsel weißer und gelber Ringe, die sich ebenso verhalten [2]), weil für die Absorption die Struktur der dem Nicol zugewandten Oberfläche maßgebend ist, die gegen die Struktur der Mittelschicht um so mehr verdreht ist (z. B. oben nach rechts, unten nach links), je größer die Dicke.

35. Symmetrische Kristalltropfen mit Zwillingsebene.

Freischwebende Kristalltropfen zeigen immer, falls sie rein sind, einen Kernfaden in der Mitte (Fig. 52), von dessen Enden, den „Polen", die Molekülachsen (Auslöschungsrichtungen) auf der Oberfläche radial ausstrahlen gegen den Äquator, wo aber häufig eine Strukturstörung auftritt, die den Äquator als Trennungslinie, gewissermaßen als Rand einer Zwillingsebene (Fig. 53) hervortreten läßt, die sich aber nur in geringe Tiefe fortsetzt, weil der spindelförmige Kern des Tropfens isotrop ist [1]). Bei Bromphenanthrensulfosäure zeigt sich keine solche scheinbare Zwillingsebene.

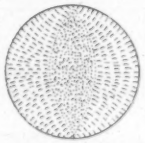


Fig. 52.

Fig. 53.

36. Kristalltropfen mit schwacher Verdrehung.

Durch fremde Zusätze wird eine Verbiegung des Fadens, sowie des spindelförmigen isotropen Kerns hervorgerufen. Die äquatoriale Trennungslinie stellt sich zunächst schief zum Kern und verbiegt sich dann windschief (Fig. 54). Die Struktur erleidet schraubenförmige

Fig. 54.

Fig. 55.

Verdrehung (Fig. 55), die sich in entsprechenden optischen Erscheinungen äußert. In engen Kapillaren kann man lange Säulen kristallinischer Flüssigkeit mit gleichmäßig spiralig umlaufendem Faden, [entsprechend spiralig gewundener Spindel] und parallel verlaufenden Trennungslinien erhalten (Fig. 56 [2])).

Zeitschr. f. phys. Chem. **73**, 598, 1910; R. Schenck, Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, 337, 1898; Kristall. Flüssigkeiten u. fl. Krist. 1905; Eichwald, Diss. Marburg 1904; A. C. de Kock, Zeitschr. f. phys. Chem. **48**, 129, 1904; J. J. van Laar, ebenda **64**, 291, 1908; A. Bogojawlensky u. N. Winogradow, Zeitschr. f. phys. Chem. **60**, 435, 1907; **64**, 229, 1908; Ada Prins, Zeitschr. f. phys. Chem. **67**, 689, 1909; H. Pick, ebenda **77**, 577, 1911; P. Gaubert, Compt. rend. **153**, 1158, 1909; Bull. soc. min. **36**, 174, 1913; G. A. Hulett, Zeitschr. phys. Chem. **28**, 639, 1899; B. Goßner, Habilitationsschr. München 96, 1908.

1) Ann. d. Phys. **2**, 667, 1900; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 3, Fig. 63; Ann. d. Phys. **52**, 536, 1917.

2) Ann. d. Phys. **18**, 808, 1905; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 13, Taf. 3, Fig. 64.

1) Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 25; diese Zeitschr. **12**, 540. 1911; Ann. d. Phys. **35**, 213, 1911.

2) Diese Zeitschr. **12**, 540, 1911; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, 31; Ann. d. Phys. **35**, 213, 1911; **52**, 527, 1917.

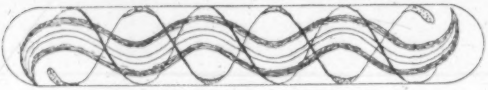


Fig. 56.

37. Dünn gepreßte Mischkristalltropfen, Zusammenfließen und Zerteilung.

Bei Tropfen, die zwischen zwei Glasplatten gepreßt werden, stellt sich der Faden zunächst senkrecht zum Glase (Fig. 57 a) und zerteilt

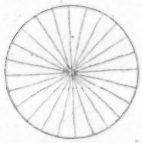


Fig. 57 a.

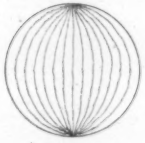


Fig. 57 b.

sich dann in zwei halbe Fäden (Fig. 57 b), die sich an die entgegengesetzten Enden eines Durchmessers der entstehenden Kreisscheibe begeben. Zwischen gekreuzten Nicols erscheinen sie als die spitzen Enden eines schwarzen Kreuzbalkens, während der andere schwarze Kreuzbalken sehr breit ist und nicht spitz zuläuft (Fig. 58 u. 59). Beim Zusammenfließen

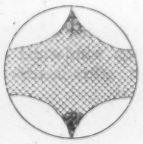


Fig. 58.

Fig. 59.

nebeneinander befindlicher Tropfen in paralleler Stellung können sich zunächst zwischen den benachbarten halben Kernpunkten halbe Konvergenzpunkte ausbilden. Infolge spontaner Homöotropie verschwindet dann ein Kern-Konvergenzpunktpaar, sodann auch das andere, indem sich die Punkte nähern und bei Vereinigung sich spurlos verlieren. Der Tropfen hat dann normale Struktur. Bei Vereinigung von vier Tropfen können vier halbe Kernpunkte und ein ganzer Konvergenzpunkt in der Mitte sich ausbilden, indem je zwei halbe Kernpunkte am Rande sich vereinigen. Der Konvergenzpunkt ist die Stelle, wo die 4 Tropfen zusammenstoßen[1]). Bei Zerteilung eines gepreßten Tropfens, z. B. beim Vorbeiströmen an einem Hindernis, nimmt natürlich jeder Teil mit der normalen Form sofort wieder normale Struktur an (Fig. 60 a—c[1])). Im Falle von

Fig. 60 a—c.

Schraubenstruktur infolge von Beimischung (Fig. 61 a, b) kann das Kreuz z. B. bei par-

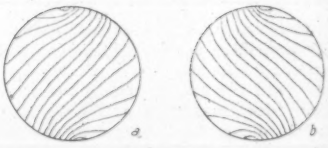


Fig. 61 a, b.

allelen statt gekreuzten Nicols dunkel erscheinen usw. (Fig. 62 a, b).

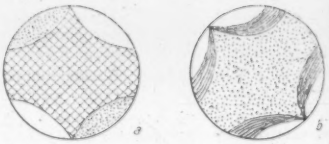


Fig. 62 a, b.

38. Künstliche Färbung und Verminderung der Richtkraft.

Zusatz fremder Stoffe kann sich außer in Strukturverdrehung und dichroitischer Färbung auch in Verminderung der molekularen Richtkraft äußern, die sich optisch durch Verminderung der Doppelbrechung zu erkennen gibt, insbesondere aber durch Beförderung der Anschmiegung an Glas. Beispielsweise genügt ein geringer Zusatz von Paraazoxyzimtsäure-

1) Ann. d. Phys. Bromphenanthrensulfosäure, i. Druck.

1) Wied. Ann. **40**, 401, 1890; Ann. d. Phys. **2**, 649, 1900; **52**, 527, 1917; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 11, 12, 13, 25, 26, 27; Die scheinb. lebend. Krist. 37, 1907.

äthylester zu den Kristalltropfen des Para-azoxyanisol, um diese bis auf den Rand zur Anschmiegung an das Glas zu bringen, so daß zwischen gekreuzten Nicols nur letzterer hell erscheint (Fig. 63 u. 64)[1]. Bei Mischungen

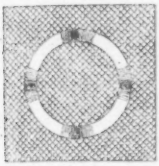


Fig. 63.

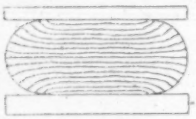


Fig. 64.

von Methoxyzimtsäure und Anisaldazin mit etwas Kolophonium werden Interferenzfarben zeigende Tropfen infolge Anschmiegung an die eine Glasfläche plötzlich weiß, sodann infolge Anschmiegung an die andere plötzlich schwarz. Bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat bildet sich infolge einseitiger Anschmiegung (z. B. nur unten) Schraubenstruktur aus, die sich durch entsprechendes optisches Verhalten kundgibt und bunte Farbenerscheinungen erzeugt.

39. Wirbelbewegung in Kristalltropfen und an Luftblasen.

Ist beim Erwärmen erhebliche Temperaturdifferenz zwischen Unter- und Oberseite eines Tropfens mit verdrehter Struktur entstanden, welche Differenz der Oberflächenspannungen bedingt, so tritt eine wirbelnde Strömung ein, die fortwährend die Struktur der Unterseite nach oben führt und umgekehrt. Dies macht sich bei Tropfen in erster Hauptlage in natürlichem Licht durch fortgesetzte Kontraktion und Neubildung der ringförmigen Brennlinie am Rande geltend (Fig. 65), im polarisierten

Fig. 65.

Lichte durch fortgesetzten Wechsel der gelben und weißen Quadranten[2]); ferner durch Zusammenrollen und Rotieren von Fäden an Luftblasen, an welchen solche Wirbel auftreten.

40. Scheinbare Rotation der Tropfen und deren Beeinflussung.

Bei Tropfen in zweiter Hauptlage und gepreßten Tropfen erzeugt die gleiche Wirbelbewegung infolge der fortgesetzten Strukturänderung eine scheinbare Rotation (Fig. 66 a bis c, 67 a—c), welche je nach der Natur

Fig. 66.

Fig. 67.

der Beimischung im einen oder andern Sinne erfolgt, und zwar um so rascher, je größer die Temperaturdifferenz und die Menge des Zusatzes[1]).

41. Brennlinien an Grenzflächen infolge Temperaturdifferenz.

In ausgedehnten Schichten treten hierbei die Trennungslinien als Brennlinien die Konvergenzhöfe berührend stark hervor (Fig. 68)

Fig. 68.

und die schwarzen Streifen zwischen gekreuzten Nicols zeigen wellenartige Fältelung[2]).

42. Wirkung von Magnetismus auf Kristalltropfen.

Im Magnetfeld wird die ganze Masse eines Kristalltropfens, auch der halbisotrope Teil, nachdem die Struktur sich zunächst derart geändert hat, daß der Faden den Kraftlinien parallel wurde, halbisotrop. Dabei richten sich

1) Ann. d. Phys. **8**, 908, 1902; **16**, 160, 1905; **19**, 411, 1906; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 28, 29, 30; Die scheinb. lebend. Krist. 1904, S. 35, Fig. 49, S. 36, Fig. 51; diese Zeitschr. **17**, 250, 1916; E. Daumer, Dissert. Halle 1912.

2) Ann. d. Phys. **39**, 80, 1912; Heideib. Akad. 1912, Nr. 13, S. 25.

1) Ann. d. Phys. **2**, 649, 1900; **48**, 184, 1915; **52** 541, 1917.

2) Ann. d. Phys. **2**, 682, 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 17—19; Ann. d. Phys. **39**, 105, 1912; **48**, 186, 1915.

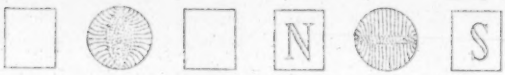


Fig. 69 a u. b.

Molekülhauptachsen ebenfalls den Kraftlinien parallel, bei geringer Feldstärke nur an den vom Faden entfernten Stellen (Fig. 69 a u. b[1]) bei großen überall, wobei der Faden ausgestoßen wird und der Tropfen homogene halbisotrope Struktur annimmt.

43. Kristalltropfen mit starker Verdrehung, Schraffierung.

Bei Tropfen, welche infolge reichlichen Gehalts an fremder Substanz stark verdreht sind, bilden die auf der Oberfläche verlaufenden spiralförmig gewundenen Fäden und Trennungslinien in Verbindung mit den parallel verlaufenden Brennlinien (Fig. 70) eine gleich-

Fig. 70.

mäßige Schraffierung, die so fein sein kann, daß man sie nur an den auftretenden Beugungserscheinungen erkennt, sowie an den Polygonsystemen, deren Seiten die Grenzen zwischen verschiedenen Schraffierungsrichtungen sind[2]).

Wirbelbewegungen in solchen schraffierten Tropfen veranlassen scheinbares Wandern der Schraffierung, sowie Drehung, Verschwinden und Wiederentstehen von Spiralen aus dem gleichen Grunde, der das Auftreten der scheinbaren Rotationen bei wenig verdrehten Tropfen bedingt[3]).

44. Ellipsoidische Mischkristalltropfen und deren Zwillinge.

Durch Mischung schleimigflüssiger und tropfbarflüssiger Kristalle können ellipsoidische oder stäbchenförmige fein schraffierte Kristalltropfen hervorgehen. Solche setzen sich häufig zu Zwillingen und Drillingen (Fig. 71 a—c)

Fig. 71 a—c.

oder ausgedehnten regelmäßigen Systemen zusammen, die als Grenzen der verschiedenen Schraffierungsrichtungen Polygonsysteme ähnlich den Aggregaten konischer Störungen zeigen[1]).

45. Angeschmiegte Schichten mit bandförmigen Trennungsflächen.

Bei stark verdrehten tropfbar flüssig-kristallinischen Schichten, welche Neigung haben, sich an das Glas anzuschmiegen, erscheinen die Trennungslinien als Ränder von hochkant stehenden spiralig gewundenen Bändern, zwischen welche sich entgegengesetzt gewundene Spiralbänder einlagern. Bei dicken Schichten sind beide Spiralen kegelförmig, aber von umgekehrter Lage der Kegel. Die Kegelspitzen erscheinen durch helle und dunkle gerade Streifen verbunden, welche scharfen Richtungsänderungen der Bänder entsprechen[2]). Gegen Luftblasen konvergieren die Bänder (Fig. 72), wäh-

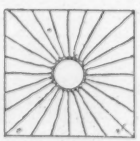


Fig. 72.

rend sie sonst parallel sind. Bei Bromphenanthrensulfosäurehydrat zeigen sich die Bänder nicht, sondern nur Grenzen von Gebieten mit verschiedener durch teilweise Anschmiegung bedingter Schraubenstruktur.

1) Ann. d. Phys. **2**, 675, 1900; Flüssige Kristalle 1904, Taf. 35—38; Die scheinb. leb. Krist. 42, 1907; Die neue Welt d. fl. Kris. 346, 1911; diese Zeitschr. 13, 550, 1912; Heidelb. Akad. 1912, Nr. 1. Taf. 5 u. 6.

2) Ann. d. Phys. **2**, 687, 1900; **35**, 193, 1911; diese Zeitschr. **12**, 540, 1911; Arch. sc. phys. et. nat. Genève **32** 9 u. 19, 1911; Heidelb. Akad. 1911, Nr. 22, Taf. 7 u. 8; diese Zeitschr. **7**, 241, 1916.

3) Ann. d. Phys. **52**, 549, 751, 1917.

1) Ann. d. Phys. **2**, 649, Fig. 158—168. 1900.

2) Ann. d. Phys. **2**, Fig. 142, 1900; diese Zeitschr. **17**, 248, 1916.

46. Quellung flüssiger Kristalle, Myelinformen.

Übergänge zwischen schleimig-flüssigen und tropfbar-flüssigen Kristallen können auch durch Quellung entstehen. Diese ist nicht ein einfacher Diffusionsvorgang, sondern ein chemischer Prozeß. Beispielsweise können bei dem flüssig-kristallinischen Ammoniumoleathydrat die Moleküle an der Oberfläche durch Wasseraufnahme in ein wasserreicheres Hydrat übergehen, welches alsbald wieder Wasser an die darunter liegende Molekülschicht abgibt usw. Wird eine Kapillarröhre mit Ammoniumoleat in Wasser gelegt, so entstehen derart die Myelinformen (Fig. 73), bei welchen die Molekül-

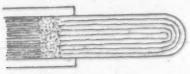


Fig. 73.

reihen im allgemeinen, abgesehen von konischen Störungen, radial angeordnet sind. Sie wachsen durch Innenaufnahme, insofern sich neue Moleküle zwischen die vorhandenen eindrängen und dieselben auseinandertreiben. Die mechanische Arbeit wird dabei auf Kosten von chemischer Energie geleistet. Die große Mannigfaltigkeit von Gestaltungs- und Bewegungsvorgängen erinnert an solche bei Lebewesen [1]).

47. Kopulation der Myelinformen, flüssige Sphärokristalle.

Hemimorphe stäbchenförmige Kristalle erscheinen zu Kugeln mit abgeplatteter Stelle zusammengedrückt, welche die Basis einer konischen Störung bildet (Fig. 74). Während zwei

Fig. 74.

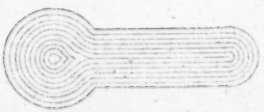


Fig. 75.

solche Kugeln in übereinstimmender Stellung zu einer einzigen gleichartigen zusammenfließen oder bei nicht übereinstimmender Stellung zu Kugeln mit zwei Abplattungen, bilden sich bei Vereinigung mit der abgeplatteten Stelle Doppelkugeln, zwischen welche sich auch ein zylindrischer Teil einschieben kann. Ist dessen Durchmesser gleich dem der Kugeln, so entstehen bakterienartige Stäbchen oder lange schlangenförmige Gebilde, deren Windungen wohl durch verschieden starke Substanzaufnahme an verschiedenen Stellen bedingt sind. Man sieht auch einfache Kugeln aus ihren Abplattungen Knospen treiben (Fig. 75) oder sich zu langen Schlangen ausstrecken, die sich plötzlich wieder zu Kugeln kontrahieren, mit solcher Gewalt, daß diese fortschnellen [1]).

48. Verdrillung und Schlängelbewegung der Myelinformen.

Manche der schlangenförmigen Myelinformen befinden sich bei schwankender Temperatur in beständiger schlängelnder Bewegung, andere rotieren um ihre Achse und wickeln sich dabei zu Spiralen, bakterienartige Stäbchen können ohne ersichtliche Ursache vorwärts und rückwärts schreiten [2]).

49. Selbstteilung und wellenartig fortschreitende Strukturveränderung.

Stäbchen und Doppelkugeln teilen sich häufig von selbst, wobei an der Trennungsstelle zuerst eine doppelkonische Strukturstörung auftritt. Schlangen können in zahlreiche Kugeln oder Stäbchen zerfallen. Ferner können an solchen Strukturstörungen entlang wandern. Rosettenartige Anhäufungen konischer Störungen bei dicken Myelinformen können (wohl ebenfalls wegen fortschreitender Strukturstörung) in gleichmäßige scheinbare Rotation kommen, bei welchen die Masse sich nicht bewegt [3]).

50. Gestalt- und Farbenänderung bei Umwandlung, Saugkraft.

Durch polymorphe Umwandlung können sich Myelinformen plötzlich gerade strecken (Fig. 76) oder kontrahieren und bei der Rückumwandlung die frühere Form annehmen. Damit ist bei gefärbten Gebilden Farbänderung verbunden. Sind es hohle Gebilde, wie sie ebenfalls von selbst entstehen, so wirken sie dabei

1) Wied. Ann. **56**, 771, 1895; Flüssige Kristalle 1904, 257; Ann. d. Phys. **19**, 22, 407, 1906; Arch. f. Entwicklungsmechanik **21**, Heft 3. 1906; **26**, 483, 1908; Biolog. Zentralbl. **28**, 517, 1008; Verh. d. D. phys. Ges. **10**, 320, 407, 1908; Heidelb. Akad. 1913. Nr. 13; Prometheus **25**, 1. 1913; diese Zeitschr. **14**, 1128. 1913; Biochem. Zeitschr. **63**, 74. 1914; Ann. d. Phys. **48**, 177, 1915.

1) Ann. d. Phys. **19**, 22, 1906; **20**, 63, 1906; Die scheinb. lebend. Krist. 57. 1907; Flüssige Kristalle und die Theorien des Lebens, Leipzig, 2. Aufl. 54. 1908; Die neue Welt d. fl. Krist. 260, 1911; Prometheus **25**. 1, 1913.

2) Chemikerzeitung **30**, 1, 1006; Ann. d. Phys. **19**, 22, 1906; **48**, 177, 1915; T. Frick u. O. Lehmann, **2**, (2). 1186. 1909 usw.; Die Lehre von d. fl. Krist. 494, 1917.

3) Diese Zeitschr. **14**, 1134, 1913 u. a. a. O.

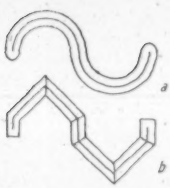


Fig. 76.

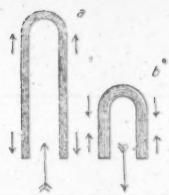


Fig. 77 a, b.

wie Teleskoppumpen, saugen Flüssigkeit ein oder stoßen sie aus (Fig. 77 a, b) und können gar andere Myelinformen in sich aufnehmen, so daß ineinander geschachtelte Gebilde entstehen [1]).

Schluß.

Das beschriebene Verhalten der flüssigen Kristalle paßt, wie eingangs bemerkt, insoweit nicht in das bisherige System der Physik, als sich dieses auf die Identitätstheorie der Aggregatzustände gründet. Es paßt aber auch nicht in das alte System der Molekularphysik, welches alle molekularen Vorgänge rein mechanisch deuten wollte. Eher dürften sich die gestaltenden und bewegenden Kräfte der flüssigen Kristalle auf Grund der elektromagnetischen Theorie der Materie deuten lassen [1]). In meinen Vorlesungen über Physik pflege ich deshalb nach kurzer Behandlung der Hauptsätze der Lehre von der Bewegung und Wärme mit Elektrizität und Strahlung zu beginnen, worauf dann Mechanik und Thermodynamik folgen und nun erst Molekularphysik einschließlich der flüssigen Kristalle. Hierdurch wird zugleich ein Übergang gewonnen zur physiologischen Physik (Akustik und Optik [2]). Jedenfalls erscheint notwendig, die bisherigen Atom- und Molekülmodelle solange zu verbessern, bis die vorliegenden Tatsachen erklärt werden können. Durch Vergleich mit den gestaltenden und bewegenden Kräften bei niedrigsten Lebewesen wird ferner zu untersuchen sein, inwieweit diese verwandter Natur sind und ob und wie hier eine Seele auslösend zweckmäßig wirkt im Sinne der dualistischen Theorie oder ob es nach monistischer Auffassung [3]) Leben auch ohne Ernährung gibt, ob auch den gesetzmäßig zwecklos wirkenden Atomen, Elektronen und Kraftfeldern eine Seele zuzuschreiben wäre.

1) Ann. d. Phys. **43**, 112, 123, 1914; **48**, 187, 1915; Die Lehre v. d. fl. Krist. 498, 1917.

1) Vgl. § 1, Anm. 4. Ferner W. Wien, Ann. d. Phys. **5**, 507, 1901; O. Lehmann, Verh. d. Karlsr. nat. Ver. **26**, 129, 1916; G. Mie, diese Zeitschr. **18**, 506, 1917; A. Korn, ebenda **19**, 10, 1918.

2) J. Frick - O. Lehmann, Physikal. Technik **2** (2), 1363 u. ff., 1909.

3) Siehe E. Haeckel, Kristallseelen. Leipzig, A. Kröner 1917; O. Lehmann, Die Lehre v. d. fl. Krist. 1917.

(Eingegangen 24. Dezember 1917.)

BESPRECHUNGEN.

L. Zehnder, Grundriß der Physik. Zweite, umgearbeitete Auflage. gr. 8°. XXXII u. 424 S. mit 373 Abbildungen. Tübingen, H. Lauppsche Buchhandlung. 1914. Geh. M. 7.—, geb. M. 8.—

Diese zweite Auflage des Grundrisses der Physik ist gegenüber der ersten (besprochen in dieser Zeitschrift **9**, 78, 1908) in der ganzen Anlage insofern geändert, als die eingehendere Behandlung von noch aktuellen Streitfragen hier fortgelassen, das Buch also mehr dem ersten Studium jüngerer Studierender angepaßt ist. Die knappe und übersichtliche Art der Darstellung läßt es im ganzen hierzu wohl geeignet erscheinen, zumal sie belebt ist durch die Aufnahme technischer Anwendungen auf dem Gebiete der Festigkeitslehre, besonders aber der Wärmemotoren und des Gleich- und Wechselstroms. Jedem Artikel ist außer der Überschrift eine kurze Zusammenfassung ihres Inhalts vorgesetzt; dieselbe Zusammenfassung ist im Inhaltsverzeichnis auf den Seiten V—XXXII wiedergegeben, um als kürzestes Repetitorium nach eingehendem Studium dienen zu können; das mag gewiß nützlich sein, nur möchte man hier und da vielleicht ein Ausfeilen und gelegentliche Erweiterung dieser Zusammenfassungen wünschen.

Im folgenden seien einige Hinweise und Wünsche angeführt, welche sich bei der Lektüre ergeben. Auf S. 24 erscheint eine Angabe über die Bestimmung der Gravitationskonstante erwünscht. Der Artikel über den Kreisel auf S. 41 ist allzu kurz, um von den Kreiseleigenschaften eine auch nur einigermaßen ausreichende Vorstellung zu geben, die wegen der ständig zunehmenden technischen Anwendungen der Kreiselwirkung besonders nützlich wäre. In der Hydrodynamik, die in den üblichen Lehrbüchern überhaupt sehr stiefmütterlich behandelt wird, fehlt der Begriff des Wirbels völlig. Der Absatz über Quecksilberpumpen auf S. 67 ist auch zu kurz, um verständlich zu sein, besonders die fünf Zeilen über die Gaedepumpe. Die Lehre von den Wellenbewegungen ist in zusammenhängender, klarer Darstellung auf etwa 20 Seiten der Akustik vorangeschickt, auch die Polarisation und Interferenz der Wellen ist bereits an dieser Stelle behandelt, so daß die Optik entlastet wird. Die Erklärung der Kombinationstöne, speziell der Differenztöne durch Interferenzwirkungen auf S. 120 ist falsch; diese Darstellung ist um so unverständlicher, als auch die Sum-

mationstöne dort erwähnt werden, die doch durchaus nicht auf Interferenz zurückführbar sind. In den einleitenden Kapiteln zur Optik, die charakteristischerweise hinter der Akustik und vor der Elektrizität steht, klingt die Vorliebe des Verf. für die elastische Theorie des Lichtes, zumal in Rücksicht auf die Anschaulichkeit der Vorstellung, stark durch, wenn auch natürlich die elektromagnetische Theorie gebührend erwähnt wird. Immerhin gehen die Darlegungen des Verf. auf S. 125 und 126 in dem Artikel über „Elastische Theorie der Lichtemission" reichlich weit, in dem die lichtaussendenden Schwingungen auf elastische Wellen im Atom zurückgeführt werden und unter Zugrundelegung der Schallgeschwindigkeit im Eisen abgeleitet wird, daß die „so gefundenen Schwingungszahlen elastischer Schwingungen in den Atomen tatsächlich im Bereich der Lichtschwingungszahlen liegen". Demgegenüber muß denn doch betont werden, daß die Gesetze der Schwingungszahlen mechanischer Modelle prinzipiell andere sind wie die der Serienlinien, worauf vor allem Ritz und Lord Rayleigh hingewiesen haben. Der photographische Prozeß ist auf S. 147 doch wohl allzu kurz beschrieben, die Chemie des Prozesses ist völlig unerörtert geblieben, das Fixieren der Bilder überhaupt nicht erwähnt. Das Ultramikroskop wird auf S. 148 in vier Zeilen abgehandelt und dürfte daher wohl unverständlich bleiben; die Rolle der Beugung dabei bleibt völlig unerwähnt. Recht bedauerlich aber ist das gänzliche Fehlen der Strahlungsgesetze, die der Verf., ganz abgesehen von ihrer außerordentlichen theoretischen Bedeutung für die moderne Physik, schon in Rücksicht auf seinen Grundsatz, die wichtigsten technischen Anwendungen der Physik zu bringen, hätte anführen müssen; denn die Strahlungsgesetze bilden bekanntlich die Grundlage unserer heutigen Beleuchtungstechnik. In dem Artikel „Phosphoreszenz" auf Seite 170 und 171 wird die Phosphoreszenz nur mit den doch recht hypothetischen „chemischen Umwandlungen" in Zusammenhang gebracht; von der auf breiter experimenteller Basis errichteten lichtelektrischen Theorie Lenards wird nicht gesprochen. In Fig. 157b ist das Fresnelsche Biprisma falsch gezeichnet. Die wenigen Zeilen über Lumierephotographie auf S. 177 können kein Verständnis für das Verfahren erwecken. Im Artikel über „Optisch drehende Substanzen" auf S. 190 wäre ein Hinweis auf den Unterschied des Grundes für die Drehung bei Kristallen und bei Flüssigkeiten, bzw. Gasen erwünscht. Die mechanische Wärmetheorie, speziell auch der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, findet erfreulicherweise eine ausführlichere Behandlung, als das in den meisten Lehrbüchern dieses Umfanges immer noch der Fall ist. Hier findet sich auch in einem besonderen Artikel ein Überblick über die wichtigsten Wärmemotoren. Was man aber vermißt, ist die Ausführung und Erläuterung des rein thermodynamischen Wirkungsgrades, also die Verbindung zwischen den vorhergehenden thermodynamischen Darlegungen mit denen über die mehr praktischen Konstruktionen der Wärmemotoren. Auf den letzten 262 Seiten wird die Elektrizität und der Magnetismus behandelt. Ein Satz wie der: „Auch wer die völlige Wesensgleichheit der elektromagnetischen und der Licht-Wellen nicht zugibt", — klingt in einem modernen Lehrbuch der Physik mindestens auffällig. Ferner dürften die Darlegungen über den Widerstand und die Elektrolyse reinen Wassers etwas exakter zu formulieren sein; wenn der Verf. schreibt: „Man glaubt, daß chemisch absolut reines Wasser durch den elektrischen Strom überhaupt nicht zersetzt werden könne", so ist dagegen zu bemerken, daß „chemisch ganz reines" Wasser eine durchaus definierte Leitfähigkeit besitzt, deren übereinstimmende Berechnung nach drei verschiedenen Methoden einen der glänzendsten Erfolge der Theorie der elektrolytischen Dissoziation bildet, daß ferner die zur Elektrolyse nötige Spannung sich ebenfalls zahlenmäßig angeben läßt. Daß hier wie in den meisten Lehrbüchern der Physik immer noch die sekundäre Wasserzersetzung von Lösungen durch den Strom gelehrt wird, muß wohl noch eine Zeitlang in Kauf genommen werden. Unverständlicher dagegen ist, daß auch hier noch behauptet wird, daß die Teslaströme trotz ihrer hohen Spannung physiologisch deshalb unwirksam wären, weil sie wegen der hohen Schwingungszahl in der äußersten Oberhaut des Menschen verliefen. Abgesehen davon, daß das durch die durch zahlreiche Versuche bestätigte Nernstsche Nervenreiztheorie längst als falsch erwiesen und richtig gestellt ist, sollte doch durch die praktische Anwendung der Teslaströme in der Medizin bei dem sog. Diathermieverfahren bekannt sein, daß sie gerade zur Erwärmung des Körperinnern benutzt werden.

Der Verf. hat in dem Grundriß selbst die „mathematischen Grundsätze", da die mathematischen Entwicklungen des Buches ohne den Apparat der Differential- und Integralrechnung durchgeführt worden sind, fortgelassen, sie aber später auf mehrfachen Wunsch noch gesondert drucken lassen. Dem Referenten würde es passender erscheinen, wenn dieser kurze Abriß in das Buch selbst verarbeitet würde, denn die Zeit sollte doch allmählich vorüber sein, in der ein für Studenten bestimmtes Lehrbuch der Physik ängstlich die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung meiden mußte.

Auch aus diesem Grunde ist dem anregend und übersichtlich geschriebenen Buche baldigst eine neue Auflage zu wünschen. F. Krüger.

C. Cranz, Lehrbuch der Ballistik. Band I: Äußere Ballistik, 2. Auflage, unter Mitwirkung von Hauptmann Becker. gr. 8°. XVI u. 528 S. mit 184 Figuren im Text und 4 Lichtdrucktafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. Geh. M. 19.—, geb. M. 22.—.

Im Jahre 1896 gab der durch ballistische Versuche schon wohlbekannte Verfasser ein „Kompendium der theoretischen äußeren Ballistik" heraus, welches den ganzen bis dahin vorliegenden Stoff zusammenfaßte. Daraus ging dann das erweiterte „Lehrbuch der Ballistik" in 4 Bänden hervor, von denen im Jahre 1910 der erste, enthaltend die äußere Ballistik, Band 4 mit den zugehörigen Tabellen nebst Lichtbildern fliegender Geschosse, sowie 1913 die experimentelle Ballistik als Band 3 erschienen, während die dem zweiten Band vorbehaltene innere Ballistik noch aussteht. Inzwischen hat sich eine neue Auflage des ersten Bandes als notwendig herausgestellt, die gegenüber der vorhergehenden bemerkenswerte, durch neuere Forschungen bedingte Erweiterungen aufweist.

Der Verfasser geht wie üblich von der elementaren Wurfbewegung im luftleeren Raum aus und behandelt im zweiten Kapitel ausführlich die theoretischen Ansätze und empirischen Formeln für den Luftwiderstand. Die scharfe Prüfung ergibt, daß bisher noch keine Formel allen Einflüssen, von denen die Geschoßform infolge ihrer Wirkung auf die Relativbewegung der umgebenden Luft wohl die größten Schwierigkeiten bereitet, gerecht wird.

Im dritten Abschnitt werden die Differentialgleichungen der Bewegung unter der allgemein gebräuchlichen Beschränkung des Widerstandes auf eine reine Geschwindigkeitsfunktion aufgestellt und daraus die von der speziellen Gestalt dieser Funktion unabhängigen

Eigenschaften der Flugbahn abgeleitet. Die erste Integration wird im Anschluß hieran für einige einfache Widerstandsgesetze streng und die zweite mit Näherungsmethoden, die schon auf Euler zurückgehen, durchgeführt. Eine weitere Gruppe von Näherungslösungen beruht auf einer solchen Vereinfachung der grundlegenden Differentialgleichung, daß ihre strenge Integration unter Zuhilfenahme von Tabellen für die dabei auftretenden Funktionen (Band 4) möglich wird. Hierher gehört auch eine Reihe graphischer Verfahren, die im wesentlichen auf eine Zerlegung der Flugbahn in gekrümmte oder gerade Zonen hinauslaufen. Eine derartige Zerlegung wird jedenfalls dann notwendig, wenn man der durch neuere Versuche ermittelten starken Änderung des Luftwiderstandes beim Unterschreiten der Schallgeschwindigkeit durch einfache Ansätze gerecht werden will. Auf diese Weise lassen sich — wieder mit Hilfe der erwähnten Tabellen — die wichtigsten praktisch vorkommenden Aufgaben rechnerisch erledigen, was der Verfasser durch eine Anzahl von als Normalbahnen bezeichneten Beispielen belegt. Die Berechnung der sogenannten Schußtafeln auf Grund von Schießversuchen wird unter Bezugnahme auf die Heydenreichsche „Lehre vom Schuß" nur kurz angedeutet.

Die nächsten Abschnitte sind den Geschoßabweichungen gewidmet, von denen die infolge des Windes, der Erddrehung, sowie durch einseitige Gestaltung der Schießvorrichtung (Gewehr mit aufgestecktem Bajonett) zuerst behandelt werden. Darauf folgt die vielumstrittene Abweichung aus der Flugbahnebene durch die Geschoßrotation. Der Verfasser bemerkt, daß es sich hierbei um drei zusammenwirkende Vorgänge handelt: erstens um die Mitnahme von Luft durch die Rotation (Zirkulation, Magnus-Effekt), welche bei geneigter Geschoßachse gegen die Flugbahntangente eine Impulskomponente normal zu letzterer ergibt, weiterhin um das Abrollen des Geschosses auf der vor ihm verdichteten Luft (Polsterwirkung, Poisson-Effekt) und schließlich um die Kreiselwirkung selbst. Da die ersten beiden Einflüsse mit der Lage der Geschoßachse über oder unter der Flugbahntangente ihr Vorzeichen wechseln, so schließt der Verfasser ganz richtig auf das Überwiegen der Kreiselwirkung im Falle einseitiger Abweichung bei gleichsinnigem Drall. Er erklärt die von ihm als überaus verwickelt erkannte Erscheinung auf graphischem Wege durch eine zykloidische, bei Rechtsdrall ganz auf der rechten Seite der Vertikalebene liegende Kurve der Geschoßspitze, welche infolge der Drehung der Bahntangente und der Verschiebung des Angriffspunktes des Luftwiderstandes an Stelle des vollen Präzessionskreises tritt. Diese schon in der vorigen Auflage enthaltene Theorie wirkt nicht recht überzeugend, zumal in der darauf folgenden Näherungsrechnung die mit der Kreiselgleichung unvereinbare Unabhängigkeit der Präzession von der Neigungsänderung der Bahntangente vorausgesetzt wird. Es scheint demnach, als ob man für den ganzen Vorgang vor der Hand noch auf Versuche angewiesen ist, wie sie u. a. der Verfasser in vorbildlicher Weise mit Holzmodellen angestellt hat. Diese ergaben für sehr steile Flugbahnen fast stets eine mit dem Auftreffen des Geschoßbodens verbundene Umkehr der Seitenabweichung beim Niedergang. Allerdings waren bei diesen Versuchen die Geschwindigkeiten viel kleiner als bei scharfen Schüssen und blieben insbesondere stets weit unter der des Schalles. Daher kann auch der Zustand der Luft in der Umgebung des Geschosses in beiden Fällen nicht übereinstimmen, was zweifellos den Vergleichswert der Modellversuche beeinträchtigt.

Um die weitere Ausbildung der Lichtbildaufnahmen von Geschossen hat sich der Verfasser ganz besondere Verdienste erworben; er gibt am Schluß des Werkes eine Anzahl außerordentlich schöner Lichtbilder, welche die Wellenbildung in der Luft mit bisher unerreichter Schärfe zum Ausdruck bringen. Den Schluß des Werkes bildet nach einer Erörterung der zufälligen Geschoßabweichungen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wirkung der Geschosse am Ziel, wobei eine Reihe neuer Erfahrungstatsachen, z. B. die sogenannte Sprengwirkung beim Durchschießen feuchter Massen, eingehend besprochen wird.

Der Wert des Buches, welches keiner Empfehlung mehr bedarf, beruht vor allem in seiner Vollständigkeit; er wird noch erhöht durch eine bis 1916 fortgeführte Literaturübersicht. H. Lorenz.

L. Graetz, Die Physik. 1. Band von „Die Naturwissenschaften und ihre Anwendungen" von C. Thesing. Mit einer Einführung in das gesamte Werk von W. Ostwald. gr. 8°. XXXI u. 569 S. mit 385 Abbildungen und 15 Tafeln. Leipzig, Verlag „Naturwissenschaften" G. m. b. H. 1917. Geh. M. 16.—, geb. M. 18 u. 20.—.

Dieses Werk bildet den ersten Band eines Sammelwerkes, das unter dem Namen „Die Naturwissenschaften" einen Überblick über die gesamten Naturwissenschaften in einer „mehr erzählend gehaltenen, für eine zusammenhängende Lektüre geeigneten Form" geben will, und in 7 Bänden die Gebiete: Physik und ihre Anwendungen, Chemie und ihre Anwendungen, Himmelskunde einschließlich Geophysik, Meteorologie und Klimatologie, Erdgeschichte einschließlich Gesteinskunde, Kristallographie und Mineralogie, Allgemeine Biologie, Allgemeine Zoologie und Anthropologie, einschließlich Paläozoologie und Urgeschichte, Allgemeine Botanik einschließlich Paläobotanik, behandeln soll.

Dieser erste, jetzt erschienene Band über die Physik löst jedenfalls überaus geschickt die schwierige Aufgabe, im wesentlichen ohne mathematische Ableitungen in fließend geschriebener Form eine Einführung in die Gesamtheit der physikalischen Probleme zu geben und zugleich dem Leser bis in die schwierigsten Fragen hinein ein guter Führer zu sein. Da es sich nicht um ein Lehrbuch der Physik im gewöhnlichen Sinne handelt, so konnten und mußten manche Gegenstände von der Behandlung ausgeschlossen werden, die man sonst in Physikbüchern findet, aber man muß bewundern, mit welchem Geschick die Auswahl getroffen ist und wie es dem Verfasser geglückt ist, ein lückenloses Ganzes zur Darstellung zu bringen, bei dem sich eins auf dem anderen aufbaut, und das den Leser bis zu den höchsten Problemen führt und zugleich durch Ausblicke auf die Anwendungen in der Technik den Anschluß an das praktische Leben wahrt. Bezeichnend für die geschickte und durchaus eigenartige Darstellung ist die Gliederung, die der Verfasser dem gesamten Stoff gegeben hat, der in vier Hauptabschnitte: Die materiellen Körper, Die Elektronen, Die Strahlungserscheinungen und Der Äther, Strahlen, Elektronen und Materie, eingeteilt wird. Der erste Abschnitt bringt die Grundbegriffe über Kraft und Bewegung, Kreisbewegung und Kreisel, Schwerkraft, Temperatur, Wärme, Arbeit, Flüssigkeiten und Gase, Dämpfe, tiefste Temperaturen, Atome, Moleküle, Ionen, kinetische Gastheorie, osmotischer Druck, Verwandlung von Wärme in Arbeit, Wellenbewegung und Schall.

Der zweite Abschnitt bringt die elektrischen Grunderscheinungen, Elektrolyse, atomistische Struktur der Elektrizität, Durchgang der Elektrizität durch Gase, freie Elektronen, Elektronen in Metallen, Magnetismus

und Elektromagnetismus, Induktionswirkungen, Erzeugung starker Ströme und ihre Anwendung.

Der dritte Abschnitt behandelt: Die elektrischen Schwingungen, das Licht als Wellenbewegung, optische Apparate, Spektralanalyse, Polarisation des Lichtes, Ultraviolett und Ultrarot, Strahlung des schwarzen Körpers.

Im vierten Abschnitt werden dann noch die Röntgenstrahlen und die Radioaktivität behandelt.

Die Darstellung ist überall sehr klar und mathematische Ableitungen werden nur in elementarster Form herangezogen, dafür gelegentlich einfache Formeln als Ergebnisse genauerer Ableitung mitgeteilt. Hohe Anerkennung verdient, wie es trotzdem dem Verfasser gelingt in schwierige Verhältnisse einen sehr klaren Einblick zu gewähren, so z. B. in die kinetische Gastheorie mit der Berechnung der Größe der Moleküle, der mittleren Weglängen und Avogadroschen Zahl. So dürfte das Buch seiner Aufgabe, den naturwissenschaftlich interessierten Leser in das Wissensgebiet der Physik einzuführen und einen klaren Einblick über den gegenwärtigen Stand der Forschung zu gewähren in ausgezeichneter Weise genügen. Ein sehr reichhaltiges alphabetisches Namen- und Sachverzeichnis macht das Buch im Gebrauch zum Nachschlagewerk sehr handlich. Allerdings soll auch nicht verschwiegen werden, daß zuweilen die Reichhaltigkeit der Inhaltsangabe und der Stichworte auch ein klein wenig enttäuscht. Es finden sich z. B. die Lehren von den Energiequanten, vom Äther, der Aberration, dem Michelsonschen Versuch, der Relativitätstheorie im Verzeichnis angeführt, aber in Wahrheit werden alle diese Probleme auf insgesamt 3 Seiten erledigt, so daß nach der Meinung des Ref. ein Nichtphysiker schwerlich einen anderen Eindruck gewinnen kann, als daß hier noch Probleme auftauchen, von denen er nichts mehr versteht. Wenn auch durch die Größe der Aufgabe strengste Beschränkung im Raum unbedingt nötig war, so hätte hier vielleicht durch Hinzufügen von noch ganz wenigen Seiten der Einblick in diese Fragen, namentlich ihre außerordentlich zukunftsreiche Bedeutung etwas mehr geklärt werden können. Ebenso hätte wohl die Grenze der Leistungsfähigkeit von Fernrohr und Mikroskop ein klein wenig deutlicher zur Darstellung gebracht werden können, dann wäre der Sinn des Ultramikroskopes besser hervorgetreten. Ein Fehler in zu weitgehender elementarer Behandlung ist Ref. aufgefallen. Bei der Ableitung der Zentrifugalkraft wird von der Fig. 26 behauptet und in der Ableitung auch als richtig vorausgesetzt, daß $AB = AD$ ist, aber hier wird der Laie sich vergebens fragen, wie man diese beiden Strecken gleich nennen kann. Das sind jedoch nur kleine Schwächen, durch die der große Wert der schönen Darstellung des Ganzen nicht herabgesetzt werden soll. Die Ausstattung des Werkes ist sehr ansehnlich, die Figuren meist sehr klar und deutlich, nur einzelne sind weniger geglückt, so z. B. die Abbildung der Kundtschen Staubfiguren und die Gewinnung fester Kohlensäure. Eine schöne Beigabe sind die Porträts einer großen Zahl berühmter Physiker, wobei allerdings die Wiedergabe im Druck in dem dem Ref. vorliegenden Exemplar zum Teil zu wünschen übrig läßt. Schlecht ausgefallen sind auch die farbigen Abbildungen im Text und die farbigen Tafeln. Hierin sind wir eigentlich gewöhnt, in sonst so gut ausgestatteten Werken Besseres zu sehen.

Die dem Bande vorangestellte Einführung in das gesamte Werk von W. Ostwald enthält eine kurz gefaßte Übersicht über die Gesamtheit aller Wissenschaften, die im wesentlichen eine Darstellung Ostwaldscher Philosophie über diesen Gegenstand ist. Danach würde auch jede andere „Geisteswissenschaft" nur so viel wahre Wissenschaft enthalten, als sie sich der naturwissenschaftlichen Methoden und Hilfsmittel bedient. Auch wenn man dieser Auffassung zustimmen will, so kann sich Ref. des Eindrucks nicht erwehren, als ob durch diese Einführung für die Naturwissenschaften noch eine besondere Reklame gemacht werden soll, die doch diese wirklich nicht nötig haben.

Classen.

K. Strecker, Jahrbuch der Elektrotechnik. gr. 8°. II. Jahrgang 1913, VII u. 249 S. M. 10.—. III. Jahrgang 1914, VIII u. 236 S. M. 10.—. IV. Jahrgang 1915, VIII u. 246 S. M. 16.—. München u. Berlin, R. Oldenbourg.

Daß die Menschheit noch weit mehr als bisher dazu kommen muß, sich selber ihre geistige Produktion und Überproduktion durch einheitliche und zuverlässige Berichterstattung, sowie durch vollendet organisierte Registratur verdaulich zu machen, ist schon häufig empfunden und ausgesprochen worden. Das in vier Jahrgängen vorliegende, von der bewährten Arbeitskraft und Organisationsfähigkeit K. Streckers geschaffene und geleitete Jahrbuch der Elektrotechnik stellt für sein Gebiet einen tüchtigen Schritt auf diesem Wege dar. Zunächst wurde ein zweckmäßiges Schema für die Gliederung des gewaltigen Wissensstoffes geschaffen, den die theoretische und praktische Elektrophysik und Elektrotechnik in jedem Jahre hervorbringen. Dann wurde ein Stab ausgezeichneter Spezialisten mit der Bearbeitung des Jahresstoffes betraut. Endlich wurde auf sorgfältige Literaturnachweise Wert gelegt, sowie auf vollständige Namen- und Sachregister. So kann man sich einmal über den Zusammenhang und die Neuerscheinungen eines Gebietes orientieren; kann weiter zu jedem sachlichen Stichwort und endlich zu jedem Autorennamen die Literaturnachweise rasch finden. Die Hauptgliederung in A. Elektromechanik, B. Elektrochemie, C. Elektrisches Nachrichten- und Signalwesen, D. Messungen und wissenschaftliche Untersuchungen zeigt, in wie breitem Umfang diese Orientierung beabsichtigt ist. Ausstattung und Druck sind vorzüglich. Trotz aller dieser rühmlichen Vorzüge hat der Referent doch seine Zweifel, ob das hohe Ziel, was vorschwebte, schon erreicht ist. Es können ja bei dem Umfang von rund 250 Seiten die Berichte nur gewissermaßen in Kurzschrift abgefaßt werden, so daß dem Leser der Inhalt der Arbeiten doch nur sehr unvollständig zu Gemüte kommen kann. Da man auch, wohl absichtlich, einen nüchternen Berichterstatterton gewählt hat, so steht das Bild meist ohne Licht und Schatten und ziemlich farblos da. Während doch gerade die kritische Vorlese des sachverständigen Berichterstatters zur Entlastung der übrigen Menschheit das Ziel sein sollte. Aber es wird wohl auch hier wieder sein, wie immer: Auch der sachverständigste Berichterstatter bringt nicht soviel freie Zeit für diese Art von kritischer Auslese auf, als nötig wäre, um wirklich mit voller Verantwortlichkeit die Spreu von dem Weizen zu scheiden. Ehe nicht eine mit gewaltigen Mitteln ausgestattete Berufsorganisation für diesen sichtenden Dienst der Wissenschaft geschaffen wird, werden wohl alle solche Versuche eine gewisse menschliche Unzulänglichkeit behalten. — Findet man sich mit dieser Resignation ab, so muß man die Leistung Streckers und seines Mitarbeiterstabes als eine hervorragende anerkennen.

H. Th. Simon.

Jakob I. Weyrauch, Robert Mayer zur Jahrhundertfeier seiner Geburt. Mit zwei Bildnissen und einer Darstellung der Totenmaske R. Mayers. gr. 8°. V, 105 S. Stuttgart, Konrad Wittwer. 1915. Geh. M. 5.—, geb. M. 6.—.

Am 25. November 1914, dem hundertjährigen Geburtstage Robert Mayers, sollte in Stuttgart eine von der dortigen Technischen Hochschule und von dem Verein deutscher Ingenieure (in Berlin) eine Gedächtnisfeier stattfinden. Der Weltkrieg machte sie unmöglich. Den ersten Teil des vorliegenden kleinen Buches bildet der Festvortrag, den Weyrauch halten sollte. Er schildert mit warmer Verehrung für seinen schwäbischen Landsmann dessen Lebensgang, den Weg, der ihn zu seiner großen Entdeckung führte, und widerlegt insbesondere ausführlich die auch noch heute zuweilen gehörte Behauptung, Mayer sei auf „metaphysischem" Wege dazu gelangt. In Wahrheit „disgustierten" ihn, wie er einmal schreibt, derartige Spekulationen „aufs äußerste". So entsteht vor unserm Auge durch Weyrauchs Darlegungen das Bild eines echten Naturforschers und einer liebenswerten Persönlichkeit.

Der zweite Teil enthält Angaben über technische Bestrebungen Mayers, der dritte eine kräftige, aber verdiente Abfertigung Treitschkes, der in seiner Deutschen Geschichte eine gänzlich schiefe und aller tatsächlichen Kenntnis bare Darstellung der Persönlichkeit Mayers und seiner Entdeckung gegeben hatte. Der vierte Teil, „Poggendorff und Mayer" beschäftigt sich mit der Frage, was Poggendorff wohl veranlaßt haben möge, Mayers Aufsatz nicht nur nicht zu veröffentlichen, sondern ihn trotz Mayers Reklamation diesem nicht wieder zurückzuschicken. Der fünfte Abschnitt, „Helmholtz und Mayer" stellt regestenartig alle Äußerungen von Helmholtz und Mayer, die sich auf ihr gegenseitiges Verhältnis beziehen, zusammen; der sechste endlich bespricht die bekannten Bildnisse Mayers, von denen zwei in schöner Ausführung beigegeben sind.

Aus dieser Aufzählung wird der Leser ersehen haben, daß es sich um eine durchaus empfehlenswerte Schrift handelt, die namentlich allen historisch Interessierten warm empfohlen werden kann, gleichzeitig als Beispiel einer sachlichen und leidenschaftslos urteilenden Auseinandersetzung. C. Schaefer.

C. Neumann, Franz Neumanns Beiträge zur Kristallonomie aus den Jahren 1823 und 1826. Ein Versuch, den wesentlichen Inhalt dieser vor fast hundert Jahren erschienenen fundamentalen Schriften in übersichtlicher u. lückenloser Weise darzustellen. (Abhdlgn. sächs. Ges. d. Wiss. Band XXXIII, No. III. gr. 8°. S. I—XX u. 196—458, 66 Fig. u. 22 Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner. 1916. M. 14.—

Die geometrische Kristallographie kann, soweit sie es wie hier, mit der äußeren Begrenzung der Kristalle zu tun hat, als abgeschlossen gelten und die vorliegende Neu-Herausgabe ist daher schon aus diesem Grunde ausschließlich von historischem Interesse. Es handelt sich um zwei Schriften. Davon ist die F. Neumannsche Dissertation De lege zonarum (1826) die bekanntere und auch heute noch lesenswert, wenn auch das „Zonengesetz sich nicht als „dominierendes Prinzip" der kristallographischen Entwicklung im physikalischen Sinne hat nachweisen lassen. Die hier benutzte gnomonische Projektion ist in der ersten Abhandlung der anderen Schrift (Beiträge zur Kristallonomie, I. [u. einziges] Heft 1823) ausführlich behandelt („Methode, den Zusammenhang der Glieder eines Kristallsystems und ihre gegenseitigen Beziehungen graphisch darzustellen"), und hat bekanntlich durch v. Laues Kristall-Röntgenogramme erneut praktische Bedeutung gewonnen. Die zweite Abhandlung derselben Schrift („Über den eigentümlichen Entwicklungsgang der zwei- und eingliedrigen Kristallsysteme") beschäftigt sich mit den Analogien der Kristalle von Orthoklas, Epidot und Eisenvitriol mit rhomboedrischen und rhombischen Kristallen in geometrischer Hinsicht. Analogien, auf die wir heute, nach Kenntnis der physikalischen Unterschiede, wenig Gewicht mehr zu legen pflegen.

Da die Abhandlungen z. Z. lateinisch geschrieben und in Sprache und Auffassung immerhin einiges, dem heutigen Mineralogen Fremdartige enthalten, werden die Herausgabe in deutscher Sprache und die vom Herausgeber gemachten erläuternden Zusätze wie auch die Unterdrückung von heute veralteten Erörterungen das Verständnis erleichtern. O. Mügge.

J. Hartmann, Tabellen für das Rowlandsche und das internationale Wellenlängensystem. (A. u. d. T. Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. Mathemat.-phys. Klasse. N. F. 10. Bd. No. 2.) 78 S. mit 1 Tafel. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung. 1916. M. 6.60.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Aufstellung von Tabellen, welche eine zuverlässige Umrechnung der an die Rowlandschen Wellenlängen-Normalen angeschlossenen Messungen — das sind alle älteren und fast alle astrophysikalischen Beobachtungen — auf die internationalen Angströmeinheiten gestatten. Da bekanntlich infolge von Druckverschiebung, Dopplereffekt usw. die Fraunhoferschen Linien nicht direkt mit den Emissions-Linien irdischer Lichtquellen zusammenfallen, so wurde zunächst durch neue genaue Messungen des Verfassers die Lage der Eisenlinien gegenüber dem Fraunhoferschen Sonnenlinien, deren Wellenlängen dem Rowlandschen System entnommen wurden, festgelegt und somit eine direkte Zurückführung des internationalen Systems auf die Rowlandsche Festlegung der Fraunhoferschen Sonnenlinien gewonnen. Försterling.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Münster Dr. V. Geilen für Mathematik.

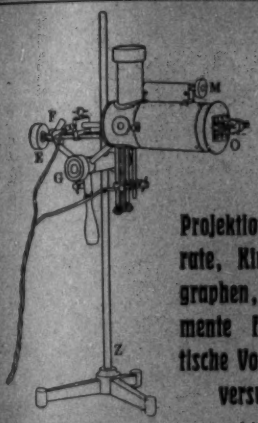
Berufen: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Rudolf Weinland zum ord. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Straßburg.

Ehrung: Der Professor der Physik an der Universität Cambridge Sir Joseph John Thomson wurde zum Vorsteher des Trinity College ernannt.

Verliehen: Dem mit Titel des a. o. Professors bekleideten Privatdozenten für Physik und Honorardozenten für Meteorologie und Klimatologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Arthur Szarvassi der Charakter des a. o. Professors.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der chemischen Technologie und Elektrochemie an der Technischen Hochschule Darmstadt Geh. Hofrat Dr. Otto Dieffenbach.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



Projektionsapparate, Kinematographen, Instrumente für optische Vorlesungsversuche.

Experimentier-Bogenlampe „Sigma", allseitig verstellbar, m. einstellbarem Linsensystem.

Listen unberechnet.

Ed. Liesegang, Düsseldorf.

Gegr. 1854. Brieffach 124.

Induktorium

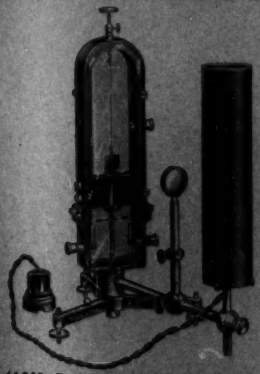
Patent Klingelfuß

mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampèremeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.

Fr. Klingelfuß & Co., Basel.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. — Zusammenfassende Bearbeitungen; B. — Besprechungen.)

Seite

Atmosphäre: Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien —, v. V. F. Hess u. W. Schmidt . . 109
— Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der — mit der Höhe, v. A. Gockel 114
Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die Physik. (B.) 128
Deutsch, W., Metallphysik. (B.) 128
Einstein, A., Notiz zu E. Schrödingers Arbeit: „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes" . . . 115
Energiekomponenten: Notiz zu E. Schrödingers Arbeit: „Die — des Gravitationsfeldes", v. A. Einstein . 115
Flächen: Spiegelung von — mit negativer Krümmung, v. P. Selényi 105
Flamm, L., Zum gegenwärtigen Stand der Quantentheorie. (Z. B.) 116
Gase: Über die Verteilung radioaktiver — in der freien Atmosphäre, v. V. F. Hess u. W. Schmidt . . 109
Gockel, A., Über die Ursache der Zunahme der Ionisation der Atmosphäre mit der Höhe 114
Gravitationsfeld: Notiz zu E. Schrödingers Arbeit: „Die Energiekomponenten des —", v. A. Einstein . . 115
Hess, V. F. u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre . . . 109
Ionisation: Über die Ursache der Zunahme der — der Atmosphäre mit der Höhe, v. A. Gockel . . . 114

Seite

Kohlschütter, V., Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über Kolloidchemie. (B.) 128
Kolloidchemie: Die Erscheinungsformen der Materie. Vorlesungen über —, v. V. Kohlschütter. (B.) 128
Materie: Die Erscheinungsformen der —. Vorlesungen über Kolloidchemie, v. V. Kohlschütter. (B.) . 128
Metallphysik, v. W. Deutsch. (B.) 128
Naturlehre: Die Grundbegriffe der modernen —, v. F. Auerbach. (B.) 128
Physik: Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Einführung in die —, v. F. Auerbach. (B.) . . 128
Quantentheorie: Zum gegenwärtigen Stand der —, v. L. Flamm. (Z. B.) 116
Radioaktive Gase: Über die Verteilung — in der freien Atmosphäre, v. V. F. Hess u. W. Schmidt . . 109
Schmidt, W. u. V. F. Hess, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre . . . 109
Schrödinger: Notiz zu E. — Arbeit: „Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes", v. A. Einstein 115
Selényi, P., Spiegelung von Flächen mit negativer Krümmung 105
Spiegelung von Flächen mit negativer Krümmung, v. P. Selényi 105

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Der Lichtbogen als Wechselstromerzeuger

Mit besonderer Berücksichtigung des Bogens zwischen Metallelektroden

von

Prof. Dr. K. Willy Wagner

Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin.

Mit 44 Textfiguren. Preis geheftet M. 3.60 exkl. 25% Teuerungszuschlag.

Kugelspiegel. D.R.P. 250814.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.